Temas:

- Derivabilidad. Notaciones.
- Gráficos y derivabilidad.
- Continuidad versus derivabilidad.

---

1. Sea $y = f(x)$ una función y $a \in Dom(f)$.

Se dice que la función $y = f(x)$ es **derivable en** $x = a$ o que **tiene derivada en** $x = a$ si y solamente si existe el límite (finito):

$$(*) \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Observaciones:

- El límite (*) cuando existe, se designa de varias maneras:
  Notación de Lagrange : $f'(a)$, $\quad y'|_{x=a}$
  Notación de Arbogasf : $Df(a)$, $\quad D_x f(a)$, $\quad Dy|_{x=a}$
  Notación de Newton : $\dot{y}_{x=a}$
  Notación de Leibniz : $\frac{dy}{dx}|_{x=a}$, $\quad \frac{df(a)}{dx}$
  En este curso usaremos las notaciones de Lagrange y Leibniz. Por lo tanto

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- El límite (*) que define la derivada, también se puede presentar de otras maneras:
  a) Haciendo $h = \Delta x$, se tiene:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

  b) Haciendo el cambio de variable $x = a + \Delta x$ (o $x = a + h$), se tiene:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

c) También, si se recuerda que

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$$

se tiene:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

manera que es *consecuente* con la notación propuesta por Leibniz.

d) Cuando la derivada se calcula en un punto genérico x, la derivada de f en x, se anota simplemente:

$$f'(x) = Df(x) = \frac{dy}{dx} = Df = f' = y' = Dy = \dot{y}$$

expresión que recibe el nombre de **función derivada** o **derivada de** f.

- Luego de esta definición se tiene que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es: ....(completar).

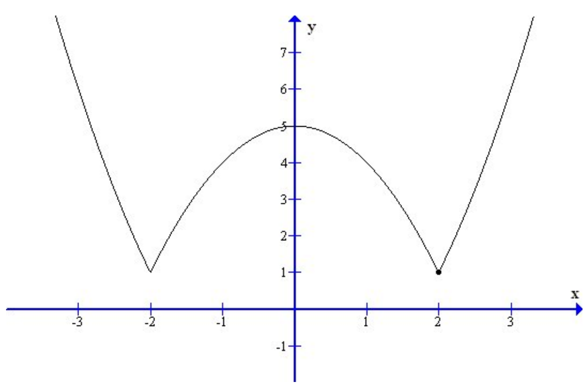
2. Si $y = f(x) = 2x^2 - 1$, encontrar usando la definición de derivada, $f'(1)$.

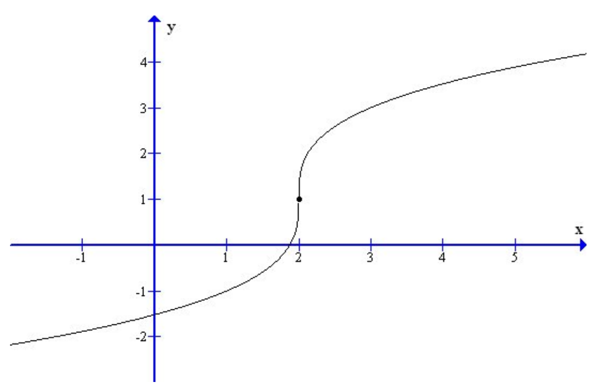
   Respuesta: $f'(1) = 4$.

3. Usando la misma función precedente, determinar $f'(x)$ (esta es la derivada de f) y a partir de ella encontrar la derivada de f en $x = -1$, 0 y 15.

4. **Gráficos y derivabilidad**.

   Considerar las funciones $y = f(x) = |x^2 - 4| + 1$, $y = g(x) = 2(x-2)^{1/3} + 1$ cuyos gráficos, respectivamente, son:





.

Comprobar que ambas funciones no son derivables en $x = 2$.

Nota: Estos ejemplos ilustran *como se ve gráficamente*, en general, una función cuando **no** es derivable en un punto.

En los puntos donde una función **no** es derivable, su gráfico

- **no** tiene recta tangente. Tales puntos, por su forma, se suele llamar *puntos angulosos*.
- tiene recta tangente vertical, recta que no tiene pendiente (que es la derivada).
- Revisar el siguiente punto

5. **Relación entre Continuidad y Derivación**

Las funciones precedentes muestran que *una función puede ser continua y no derivable en un punto*. Es decir:

$$\boxed{\text{Continua} \qquad \not\Rightarrow \qquad \text{Derivable}}$$

Pero si sucede que una función es derivable en $x = a$, entonces **obligadamente** ella debe ser continua en $x = a$. Comprobar esta afirmación usando la siguiente relación:

$$f(x) = f(a) + (x - a) \cdot \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

y recordando que:

a) f es continua en $x = a$ cuando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

b) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$

Luego:

$$\boxed{\text{Derivable} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Continua}}$$