1. Usando la definición de derivada, encontrar la derivada de la función dada en el punto indicado:

   (a) $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 8$. Sol. $f'(4) = \frac{1}{6}$
   (b) $y = g(u) = \frac{5+3u}{1-3u}$ en u. Sol. $g'(u) = \frac{18}{(1-3u)^2}$
   (c) $p = h(q) = Aq^2 + Bq + C$ en q. Sol. $h'(q) = 2Aq + B$
   (d) $y = f(x) = xe^{2x}$ en x. Sol. $y' = e^{2x}(2x+1)$
   (e) $z = g(v) = v\sin v$ en v. Sol. $g'(v) = v\cos v + \sin v$

2. Comprobar cada una de las siguientes derivadas.

   (a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}$.
   (b) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}} - a^3\right) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$.
   (c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$.
   (d) $\frac{d}{dt}\left(2-3t^2\right) = -18t\left(2-3t^2\right)^2$.
   (e) $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{4-9x} = -\frac{3}{(4-9x)^{\frac{2}{3}}}$.
   (f) $\frac{d}{dt}\left(t\sqrt{a^2+t^2}\right) = \frac{a^2+2t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}$.
   (g) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right) = \frac{4a^2x}{(a^2-x^2)^2}$.
   (h) $\frac{d}{d\theta}\left(\theta^2\sqrt{3-4\theta}\right) = \frac{6\theta-10\theta^2}{\sqrt{3-4\theta}}$.
   (i) $\frac{d}{dx}\left(\ln(ax^2+b)\right) = \frac{2ax}{ax^2+b}$.
   (j) $\frac{d}{dx}\left(\ln(ax+b)^2\right) = \frac{2a}{ax+b}$.
   (k) $\frac{d}{dx}\left(\ln x^3\right) = \frac{3}{x}$.
   (l) $\frac{d}{dx}\left(\ln^3 x\right) = \frac{3\ln^2 x}{x}$.
   (m) $\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{2}{x(1+x^2)}$.
   (n) $\frac{d}{dx}\left(x^2\ln x^2\right) = 2x(1+2\ln x)$.
   (o) $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right) = 2xe^{x^2}$.
   (p) $\frac{d}{dy}\left(b^{2y}\right) = 2b^{2y}\ln b$.
   (q) $\frac{d}{dx}\ln\left(x^2e^x\right) = \frac{2}{x} + 1$.
   (r) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right) = \frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$.
   (s) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\ln t^2}{t^2}\right) = \frac{2-4\ln t}{t^3}$.
   (t) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \frac{x^{\sqrt{x}}(2+lnx)}{2\sqrt{x}}$.
   (u) $\frac{d}{dx}(3\cos 2x) = -6\sin 2x$.
   (b) $\frac{d}{dv}\left(2\cot\frac{v}{2}\right) = -\csc^2\frac{v}{2}$.
   (v) $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin^2 t\right) = \sin t\cos t$.
   (w) $\frac{d}{d\theta}\left(\sqrt[3]{\tan 3\theta}\right) = \frac{\sec^2 3\theta}{(\tan 3\theta)^{\frac{2}{3}}}$.
   (x) $\frac{d}{d\theta}(\tan\theta - \theta) = \tan^2\theta$.
   (y) $\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right) = \frac{\theta\cos\theta - \sin\theta}{\theta^2}$.
   (x) $\frac{d}{dx}(\sin^n x\cos(nx)) = n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$.
   (aa) $\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|}$. Usar $|x| = \sqrt{x^2}$

3. Encontrar la derivada de cada una de las siguientes funciones.

   (a) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$ (b) $u = \cos(\cos(\cos x))$ (c) $y = \sin^2 x + \sec^2 x + \cos^2 x - \tan^2 x$ $(*)$

   $(*)$ si mira con cuidado esta función, puede encontrar su derivada fácilmente.

4. Suponer que la siguiente tabla entrega los valores, en los puntos indicados, de f, g, f' y g', donde f y g son dos funciones derivables en $\mathbb{R}$.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	1
4	4	5	1	2
5	5	1	2	3

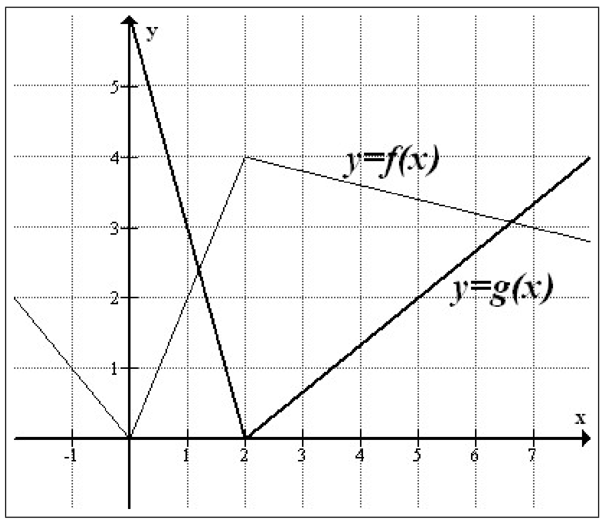
a) Calcular la ecuación de la recta tangente al gráfico de $y = g(x)$ en su punto de abscisa $x = 3$.

b) Calcular la ecuación de la recta normal al gráfico de $y = f(x)$ en su punto de abscisa $x = 2$.

c) Calcular de ser posible:

a) $(f+g)'(1)$	b) $(f-g)'(2)$	c) $(f \cdot g)'(3)$	d) $(\frac{f}{g})'(4)$	e) $(f+4)'(5)$
f) $(f \circ g)'(1)$	g) $(g \circ f)'(2)$	h) $(f \circ f)'(3)$	i) $(g \circ g)'(4)$	j) $(g \circ f \circ g)'(5)$

5. Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dos funciones cuyos gráficos son:



Gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$

Calcular cada una de las siguientes derivadas. Si alguna no existe, explicar la razón de su no existencia.

a) $(f+g)'(1)$	b) $(f-g)'(2)$	c) $(f \cdot g)'(3)$	d) $(\frac{f}{g})'(4)$	e) $(f+4)'(5)$
f) $(f \circ g)'(1)$	g) $(g \circ f)'(1)$	h) $(f \circ f)'(1)$	i) $(g \circ g)'(4)$	j) $(g \circ f \circ g)'(5)$

6. Encontrar la o las rectas tangentes a la curva $y = x^2 + x$ que pasan por el punto $(2, -3)$.

7. Dada la función polinomial de grado 3:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

encontrar a, b, c y d; de modo que se satisfagan las siguientes condiciones:

- La curva pasa por $(0, 0)$.
- En $(0, 0)$ la recta tangente forma un ángulo de 60 grados con la parte positiva del eje X.
- En $x = 1$ y $x = -1$, la curva es paralela al eje X.

8. Determine una función polinomial de grado 6 de modo que en los puntos $(1, 1)$ y $(-1, 1)$ la tangente sea horizontal y que además pase por el origen.

9. Dada una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

   a) ¿Desde qué puntos se puede trazar dos tangentes a la curva?

   b) ¿Desde qué puntos puede trazarse solamente una tangente a la curva?

   c) ¿Desde qué puntos no se puede trazar ninguna tangente a la curva?

10. Tasa instantánea de cambio del Costo = Costo marginal.

    Sea $C = C(x)$ la función de costo (total) de una empresa al producir x unidades de cierto artículo. La *tasa promedio de cambio del costo* de pasar de producir x_1 unidades a producir $x_2 = x_1 + \Delta x$ unidades es, como es de suponer:

    $$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x_2) - c(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_1 + \Delta x) - C(x_1)}{\Delta x}$$

    y la *tasa instantánea de cambio del costo con respecto a la cantidad de unidades producidas*, que recibe en el ámbito de la economía el nombre de *costo marginal*, es

    $$\text{Costo marginal} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

    Observar que aproximadamente $C'(x_1) = C(x_1+1)-C(x_1)$. Por esta razón el costo marginal se interpreta como el costo de producir una unidad más (sobre x_1).

    Suponer que el costo (en pesos) de producir x poleras para una empresa, viene dado por $C = C(x) = 2000 + 3x + 0{,}01x^2 + 0{,}0002x^2$.

    - Calcular la función de costo marginal.
    - Encontrar e interpretar $C'(200)$.
    - Comparar $C'(200)$ con el costo adicional al producir la 201ava polera.

11. Considerar la siguiente función:

    $$f(x) = \begin{cases} 12 & \text{si } x < 0. \\ 2 - x & \text{si } 0 \leq x \leq 2. \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

    a) Calcular, en caso que existan, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, y $f'(-1)$.

    b) Encontrar la función derivada $f'(x)$.

    c) Graficar en un mismo sistema de coordenadas las funciones f y f'.

12. *a*) Encontrar el valor de la suma $1 + x + x^2 + . \cdots . + x^n$.

    b) Usando el resultado precedente, encontrar el valor de $1 + 2x + 3x^2 + . \cdots . + nx^{n-1}$.

13. Considerar la función $y = f(x)$ cuyo gráfico es:

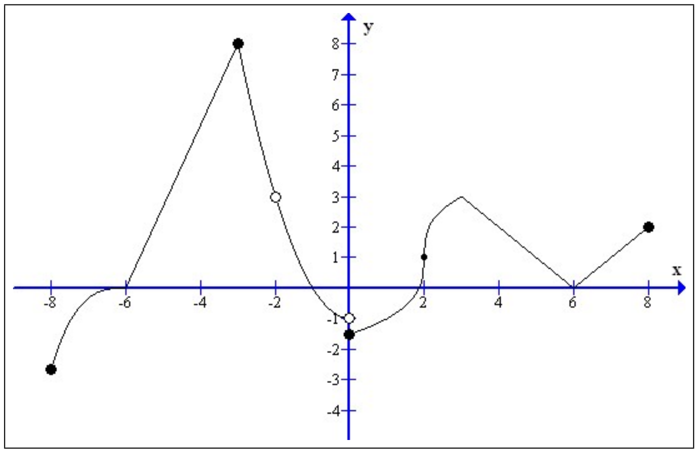


Gráfico de $y = f(x)$

Indicar los puntos del dominio de f donde esta función NO es derivable. Justificar su respuesta.

14. Establecer el valor de verdad de cada una de las siguientes sentencias. Justificar cada una de sus respuestas.

a) Si $f(x)$ es continua en $x = a$, entonces $f(x)$ es derivable en $x = a$.

b) Si $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.

c) Si $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ y $f(x_0) = x_0$, entonces $f'(x_0) = 1$.

d) Si $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en todo $\mathbb{R}$, excepto en $x = a$,entonces la recta tangente en $x = a$ es vertical.

e) Si $y = xe^{-x}$, entonces $xy' = (1 - x)y$.

f) $(f(x^2))' = 2xf'(x)$

g) Si $y = f(x)$ es una función que satisface $|f(x)| \leq x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f'(0) = 0$.

h) La tasa instantánea de cambio del área de un circulo con respecto a su radio es su perímetro.

i) La tasa instantánea de cambio del volumen de una esfera con respecto a su radio es su área.

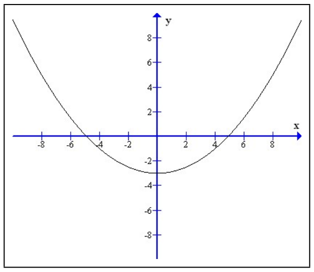
j) Si f es una función derivable en $x = a$, entonces $f'(a) = \lim\limits_{h \to a} \dfrac{f(h) - f(a)}{h - a}$.

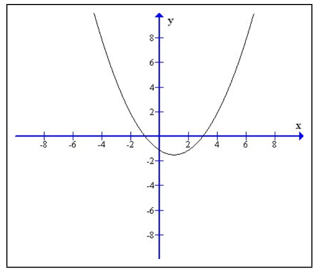
k) Si f es una función derivable en $x = a$, entonces $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a) - f(a - h)}{h}$.

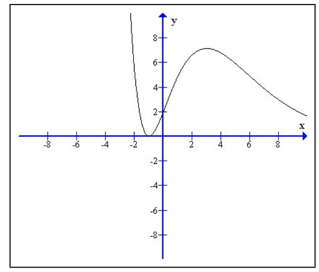
l) $\left[\left(f(x^3)\right)^3\right]' = 3\left[f(x^3)\right]^2 \cdot f'(x^3)$

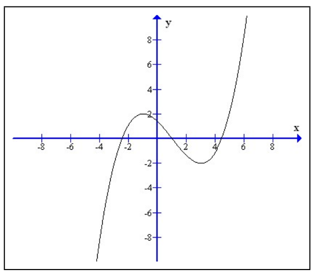
m) Si f, g y h son funciones derivables, entonces $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$.

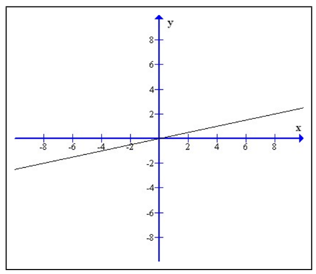
15. A continuación se entregan 6 funciones (sin ningún orden especial) los gráficos de 3 funciones y sus correspondientes derivadas. *Aparear* cada función con su respectiva derivada.

(1) 

(2) 

(3) 

(4) 

(5) 

(6)