Cálculo Diferencial

Juan R. Mayorga Z.

Instituto de Matemática y Física

Universidad de Talca

2007

Versión 1.1

Juan R. Mayorga Z.

CÁLCULO DIFERENCIAL

para Ingeniería

Para contactar al autor:

Juan Mayorga Zambrano
Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca
CHILE
E-mail: jrmayorgaz@gmail.com

DEDICATORIA

A mis hijos, Daniel y Keren, con todo mi amor:

**“¡Que mis buenas obras
sean multiplicadas y superadas,
en ellos y en su descendencia,
de generación en generación!
¡Que en medio de ellos abunden Justos
que sean ejemplo para las naciones!”.**

בה

Tabla de contenidos

Prefacio

El objetivo de este trabajo es entregar una herramienta a los estudiantes que se sumergen por primera vez en el mar del Cálculo Diferencial. No se pretende proveer un libro de texto, como los notables trabajos [7] o [1], sino más bien complementarlo. Hemos orientado la exposición considerando los contenidos que habitualmente se requieren en las carreras de *Ingeniería Civil Industrial* e *Ingeniería Civil en Computación* pero estudiantes de otras ingenierías podrían encontrar también útil el presente trabajo.

Se busca presentar de una manera clara los conceptos motivándolos con ejemplos. El material abordado va un poco más allá del plan del módulo correspondiente. No ponemos mucho énfasis en la demostración matemática de la validez de teoremas, lemas y proposiciones pero buscamos claridad en los enunciados pues queremos transmitir la filosofía subyacente a estos resultados sin sobrecargar al estudiante. Un lector con mayor interés en la formalidad matemática puede recurrir a textos preparados en ese sentido; yo recomiendo [1] y [8].

Al final de cada capítulo presentamos un listado de ejercicios propuestos. En la versión 1.1 de este texto, dejé como apéndice un banco de preguntas tipo evaluación. Para versiones posteriores pienso separar este banco de preguntas como un manual separado. El estudiante comprometido debería hacer tantos ejercicios como sea necesario hasta que adquiera confianza con la materia estudiada. Por mi propia experiencia, recomiendo que antes de "sentarse a resolver problemas" es importante primero entender los conceptos.

Como un soporte de Precálculo, esto es los requisitos para abordar de buena manera el presente curso - especialmente para funciones y gráficas, el estudiante haría bien si recurre a [3]. Para Geometría Análítica, recomendamos [4]. Para Trigonometría, recomendamos el texto gratuito [10].

El presente trabajo entra en el contexto de la reforma curricular que lleva adelante Universidad de Talca dentro de un Sistema de Evaluación Basado en Competencias (véanse e.g. [5, 6, 9]). El autor tuvo el respaldo de una beca posdoctoral de Fundación Andes (a través del Instituto de Matemática y Física) para el desarrollo de las versiones 2007 de este trabajo.

Quiero expresar mi gratitud a quienes aportaron de diferentes maneras para la consecución de este trabajo. En especial quiero agradecer a María Inés Icaza, Ricardo Baeza, Claudio del Pino y todos mis colegas en el Instituto de Matemática y Física de Universidad de Talca. Gracias también a mis estudiantes, quienes con entusiasmo trabajaron con la versión preliminar de este material. Sin el apoyo de mi esposa e hijos no hubiera tenido la posibilidad de emprender el reto, ¡gracias! Finalmente lo más importante, gracias a mi Dios, bendito Su nombre, por darme vida y sobreabundar con Su bondad mi existencia.

Juan Ricardo Mayorga Zambrano
jrmayorgaz@gmail.com

CAPÍTULO 1

Introducción

En este capítulo hacemos una revisión de tópicos que suponemos el estudiante ya maneja así que la exposición es breve. De manera particular sugerimos al estudiante que refresque el manejo de los rudimentos de Lógica Matemática.

Previo a esto, queremos llamar la atención del estudiante sobre la gran inversión que para un ingeniero constituye manejar apropiadamente herramientas y conceptos matemáticos. Para reflejar esto y para introducir a vuelo de pájaro varios de los conceptos con que nos encontraremos en el estudio del Cálculo presentamos enseguida un par de ejemplos. Para ello, tengamos en mente que el **problema** básico en Economía radica en "*satisfacer necesidades (esencialmente) ilimitadas a partir de recursos (certeramente) limitados*". Este tipo de problema se hace manifiesto tanto en los ámbitos Macro como Micro de la Economía.

Ejemplo 1.1. En buena medida, pero no de manera exclusiva, la estabilidad de la Macroeconomía de un país - y por tanto la estabilidad del país en sí mismo - se ve reflejada en el valor de la **variable** llamada *riesgo-país*. Se trata de un indicador matemático del riesgo financiero que está corriendo un país cuando gasta más de lo que ingresa al herario público, es decir que las recaudaciones del gobierno no alcanzan para cubrir los montos de sus obligaciones establecidas en su presupuesto. Esto es, en un país con un riesgo-país elevado, la probabilidad de encontrarse con una economía con serias dificultades también será elevada. Entonces, puesto que el ingrediente más importante en un país o estado es su población, no quedan ya dudas de que las **decisiones** que se tomen respecto de la marcha de la economía no pueden ser tomadas empíricamente. Es de suma importancia que haya una matemática detrás para que tales decisiones puedan ser técnicas. Al interiorizarnos en el estudio del comportamiento del riesgo-país nos damos cuenta de que esta es una **variable dependiente**, es decir, está dada como una **función** de otras variables llamadas **variables independientes**. En nuestro ejemplo tales variables independientes son las mismas que permiten al gobierno (usualmente a través del Banco Central) establecer la rentabilidad ofrecida por los Bonos de Deuda Pública (e.g. la inflación); a tales variables hay que añadirle la rentabilidad ofrecida por los bonos del Tesoro de los Estados Unidos. La **evaluación** del Riesgo-País (clásico) puede verse así: supongamos que por un Bono de la nación X emitido a un año de plazo se paga una tasa del 19 % y que por un Bono de los Estados Unidos se paga una tasa del 3,5 % anual, entonces la diferencia entre estos dos Bonos seria del 16,5 %; esta diferencia multiplicada por 100 es lo que se denomina riesgo país; significa que el riesgo país de X está en 1650 puntos, posición considerada como *muy comprometida*: la percepción del riesgo que tienen los compradores eleva la exigencia de rentabilidad para tentarlos a invertir a niveles de muy alto riesgo respecto a los Estados Unidos.

Ejemplo 1.2. Ahora consideremos una situación de Microeconomía. Consideremos una panadería. Supongamos que el dueño quiere aumentar las ganancias pues quiere abrir un segundo local en un período (digamos) de seis meses. ¿Cómo hacerlo? ¿Subir los precios a los clientes? ¿Achicar el tamaño de los panes? ¿Preparar más pan para la venta?... Probablemente la peor decisión sería, al mismo tiempo, subir el precio del pan, achicarlo y hornear más pan del usual. [1] Aquí el precio del pan, su tamaño y cantidad son variables independientes y lo que se busca **optimizar** (en este caso **maximizar**) es la ganancia en un período de seis meses, la variable dependiente.

Como se puede ver de los dos casos recién presentados, el uso de **conocimiento** para tomar decisiones de la mejor manera posible conlleva el

[1] ¿Por qué?

uso de Matemática. El Cálculo Diferencial es (entre otras cosas) un recurso poderosisímo para tal efecto y casi seguro será la primera herramienta de optimización con que se topa el estudiante. Veremos, por ejemplo, que si se encuentra un valor de variable independiente donde la **derivada** o **tasa de crecimiento** de la **función objetivo** (o variable dependiente) se hace cero, entonces tenemos un candidato a resolver un problema en optimización (maximización o minimización).

Históricamente, el Cálculo nació por el deseo de los matemáticos de resolver dos problemas: ¿cómo obtener el valor del área bajo una curva? y ¿como capturar el valor de la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado? Para una introducción a tales problemas sugerimos al estudiante indagar en [1].

A partir de la siguiente sección, empezamos la prometida revisión de prerequisitos para nuestro curso.

1.1. Relaciones y Funciones

A lo largo del texto usaremos la notación conjuntivista estándar. Un conjunto normalmente será denotado por letras mayúsculas (e.g. A, B) en tanto que se usarán minúsculas (e.g. a, b) para representar a sus elementos. Siempre se supondrá que todos los conjuntos en consideración están contenidos en un conjunto universo U. Por $a \in A$ o $A \ni a$ indicamos que a es un elemento del conjunto A. Por $A \subset B$ o $B \supset A$ indicamos que A es un subconjunto de B, esto es, todos los elementos de A también están en B. Entonces, $A = B$ si y sólo si se tiene que $A \subset B$ y $B \subset A$, es decir,

$$(A = B) \Longleftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A)\,.$$

Todo conjunto tiene por subconjunto a $\emptyset$, el conjunto vacío. Por $A \cap B$ denotamos al conjunto cuyos elementos están tanto en A como en B, es decir,

$$A \cap B = \{x \in U :\ x \in A \wedge x \in B\}.$$

Por $A \cup B$ denotamos al conjunto de elementos que están ya sea en A o en B, es decir,

$$A \cup B = \{x \in U :\ x \in A \vee x \in B\}.$$

El conjunto de elementos que estando en A, no están en B, se denota mediante $A \setminus B$, esto es,

$$A \setminus B = \{x \in A : \ x \notin B\}.$$

En particular, $B^c = U \setminus B$ representa el *complemento* de B.

Obsérvese que no se ha mencionado nada sobre la naturaleza de los elementos de un conjunto. Estos podrían ser letras, números e incluso, como en el siguiente ejemplo, otros conjuntos.

Ejemplo 1.3. Denotemos por $\mathbb{N}$ al conjunto de los **números naturales**: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$. Definamos $\mathcal{A}$ como el conjunto formado por todos los subconjuntos binarios de $\mathbb{N}$. Entonces,

$$\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, ..., \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, ...\}. \tag{1.1}$$

Notación 1.1. Denotamos por $\mathbb{Z}$ al conjunto de los **números enteros**:

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\},$$

y, por $\mathbb{Q}$ denotamos al conjunto de los **números racionales**:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\right\}.$$

Un conjunto cualquiera A está completamente definido por sus elementos. Entonces, las igualdades

$$A = \{a, e, i, o, u\} = \{i, e, a, o, u\} = \{u, a, o, e, i\}.$$

son todas válidas y, en el mismo sentido, es claro que el conjunto

$$B = \{1, 1\} = \{1\},$$

no puede pertenecer al conjunto $\mathcal{C}$ descrito en (1.1).

Cuando el orden de los elementos es importante tenemos que valernos de algún truco que permita distinguir qué elemento es el primero, el segundo, etc.

Definición 1.1. *Sean A y B dos conjuntos no-vacíos. Se define el* ***producto cartesiano*** *de A y B, denotado $A \times B$, mediante*

$$A \times B = \{(a,b) : \ a \in A \wedge b \in B\},$$

donde,

$$(a,b) \equiv \{a, \{a,b\}\} = \{\{a,b\}, a\}. \tag{1.2}$$

Se dice que $(a,b) \in A \times B$ es el ***par ordenado*** *con* ***primera componente*** *$a \in A$ y* ***segunda componente*** *$b \in B$.*

La definición (1.2) es el truco que buscamos pues el primer elemento de $(a,b) \in A \times B$, es aquel que <u>pertenece</u> al segundo elemento de (a,b). Es claro que

$$(a,b) = (b,a) \Leftrightarrow a = b,$$
$$(a,a) \neq \{a\}.$$

Dados los conjuntos no-vacíos A_1, A_2,..., A_n se define de manera similar el *producto ordenado* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. En particular, si $A = A_1 = A_2 = ... = A_n$, denotamos $A^n = A \times A \times ... \times A$ (n veces).

Definición 1.2. *Dados dos conjuntos no vacíos A y B, llamamos* ***relación de A en B*** *a todo subconjunto r de $A \times B$. Se dice que $a \in A$ está en el* ***dominio*** *de r, denotado $\mathrm{Dom}(r) \subset A$, si existe algún $b \in B$ tal que $(a,b) \in r$. Se dice que B es el* ***codominio*** *de r y se denota $\mathrm{Cod}(r) = B$. Se dice que $b \in B$ está en el* ***rango*** *de r, denotado $\mathrm{Rg}(r) \subset B$, si existe algún $a \in A$ tal que $(a,b) \in r$.*

Ejemplo 1.4. Sean $A = \{a,b\}$ y $B = \{1,2,3\}$. Entonces

$$A \times B = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\},$$

y son relaciones

$$\begin{aligned} r_1 &= \{(a,1), (a,2), (b,2)\}, \\ r_2 &= \{(b,2)\}, \\ r_3 &= \{(a,1), (b,3)\}. \end{aligned}$$

Aquí,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Dom}(r_1) &= \{a,b\}, & \mathrm{Rg}(r_1) &= \{1,2\},\\
\mathrm{Dom}(r_2) &= \{b\}, & \mathrm{Rg}(r_2) &= \{2\},\\
\mathrm{Dom}(r_3) &= \{a,b\}, & \mathrm{Rg}(r_3) &= \{1,3\}.
\end{aligned}$$

Definición 1.3. *Sean A y B dos conjuntos no vacíos. Se dice que una relación $f \subset A \times B$ es una* ***función*** *(o* ***aplicación****) si se cumplen las siguientes condiciones:*

i) $\mathrm{Dom}(f) = A$,

ii) Para cada $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $(a,b) \in f$, es decir,

$$\forall a \in A,\ \exists! b \in B: \quad (a,b) \in f.$$

En este caso se dice que f es una función de A en B y se denota

$$\begin{aligned} f:\ & A \longrightarrow B \\ & a \longmapsto b = f(a) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Observación 1.1. A veces en lugar de la notación (1.3), se escribe

$$A \ni a \longmapsto f(a) \in B. \tag{1.4}$$

Las notaciones anteriores son especialmente útiles cuando la correspondencia entre $a \in A$ y $b = f(a) \in B$ está dada por alguna regla o fórmula específica. En ese sentido puede pensarse que $f(a) \in B$ es el producto que resulta de aplicar el proceso f a la materia prima $a \in A$. También se dice que $b = f(a)$ es el valor que resulta de aplicar f al argumento $a \in A$.

Observación 1.2. Puesto que un elemento $a \in A$ determina un único elemento $b = f(a) \in B$, se suele decir que la **variable independiente** a define a la **variable dependiente** b a través de f.

El concepto de función es fundamental para comprender los procesos de la naturaleza; por tanto su importancia no debe ser subestimada. De hecho una función provée el ejemplo más simple de **modelo matemático**. Un modelo matemático es una interpretación resumida de la realidad y, como tal, inexacto. Un modelo se considera bueno cuando su inexactitud inerente es despreciable al contrastar sus resultados con otros factores importantes del fenómeno que se está modelando.

Ejemplo 1.5. Supongamos, que se quiere empezar un negocio de cría de conejos. El negocio será rentable si la población de conejos <u>crece</u> a buen ritmo. La función que <u>modela matemáticamente</u> tal <u>fenómeno</u> o <u>proceso</u> es la *sucesión de Fibonacci*. En la naturaleza, hay muchos elementos relacionados con la sucesión de Fibonacci: la cantidad de pétalos de una flor y la cantidad de espirales en una piña, etc. [2] La **sucesión de Fibonacci** se define mediante

$$\begin{aligned} F : \mathbb{N} \cup \{0\} &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \\ n &\longmapsto F(n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 0, \\ 1, & \text{si } n = 1, \\ F(n-1) + F(n-2), & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases} \end{aligned}$$

La fórmula anterior nos dice que a partir de $n = 2$ se obtiene $F(n)$ al sumar los dos elementos anteriores de la sucesión: $F(n-1)$ y $F(n-2)$.

Sucesión de Fibonacci			
n	F(n)	n	F(n)
0	0	6	8
1	1	7	13
2	1	8	21
3	2	9	34
4	3	10	55
5	5	$\vdots$	$\vdots$

1.2. El conjunto de los números reales

Hemos introducido ya los conjuntos $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ (números naturales), $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ (números enteros) y $\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z} \wedge q \in$

[2]Una versión modificada de la sucesión de Fibonacci aparece como una pieza clave en la trama de *El Código da Vinci* (Brown, 2003).

$\mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ (números racionales). Es claro que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Los griegos estaban al tanto de las propiedades de $\mathbb{Q}$ y también del hecho de que "faltaban números" para suplir las necesidades manifiestas en su estudio de la Geometría. Por ejemplo, según el Teorema de Pitágoras, la longitud de la hipotenusa correspondiente a un triángulo rectángulo cuyos catetos son de longitud 1 es $\sqrt{2}$; sin embargo, el mismo Pitágoras probó que

Teorema 1.1. *No existe un número racional tal que elevado al cuadrado resulta* 2*.*

Introduciremos axiomáticamente el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, lo que nos permitirá "llenar" los huecos dejados por $\mathbb{Q}$. En principio se pensaba que tales "huecos", posteriormente llamados números irracionales, eran "pocos" pues para las necesidades prácticas de la antigüedad el conjunto $\mathbb{Q}$ se defendía bastante bien; sin embargo, hoy muy bien se sabe (via el concepto de *cardinalidad*) que hay más números irracionales que racionales.

1.2.1. Axiomas

Todo campo del conocimiento es un conjunto de ideas que se plasma a través de palabras y símbolos. Para entender los conceptos es entonces necesario el significado exacto de tales palabras y símbolos. Introduciremos el conjunto de los números reales como un *sistema deductivo*, [3] esto es, partimos suponiendo la existencia de $\mathbb{R}$ junto con dos *operaciones internas* (adición y multiplicación) que verifican un conjunto de postulados o axiomas. No se demuestra la existencia de $\mathbb{R}$ ni la validez de tales axiomas pero se exige que sean consistentes, es decir, que no provoquen contradicciones cuando, con

[3] El ejemplo más conocido de sistema deductivo es la Geometría de Euclides. Para Euclides un **punto** es una realidad concreta que no necesita (ni puede) ser probada. Todo el conocimiento geométrico de los griegos se deriva lógicamente a partir de los Cinco Postulados de Euclides. En particular el Quinto Postulado refleja inconcientemente la concepción antigua de que el mundo es *plano*. No fue hasta principios del siglo XIX en que los matemáticos se atrevieron a ver el universo *curvo*, introduciendo Sistemas Geometrícos liberados del Quinto Postulado de Euclides. Que efectivamente el universo es curvo es una de las conclusiones de la Teoría de la Relatividad de Einstein.

ellos, se usa un razonamiento lógico. Todos los resultados que se prueben a partir de entonces constituyen teoremas, corolarios, lemas y proposiciones.

Para empezar pongamos en limpio el concepto de operación interna sobre un conjunto.

Definición 1.4. *Sea A un conjunto no-vacío. Se dice que & es una* ***operación interna*** *sobre A si & es una función de $A \times A$ en A, esto es, $A \times A \ni (a, b) \longmapsto \&(a, b) \in A$. En este caso se usa la notación*

$$a\&b = \&(a, b).$$

Suposición 1. Existen un conjunto no vacío, $\mathbb{R}$, y dos operaciones internas sobre $\mathbb{R}$, $+$ (llamada adición) y $\cdot$ (llamada multiplicación),[4] de manera que se cumplen los siguientes axiomas (**axiomas de campo**):

[4]En tanto que no se preste a confusión se omitirá el símbolo $\cdot$ así que por xy entenderemos $x \cdot y$.

Axioma 1. (Leyes de Conmutatividad)

$$x + y = y + x \quad \wedge \quad xy = yx, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R};$$

Axioma 2. (Leyes de Asociatividad)

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \wedge \quad x(yz) = (xy), \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R};$$

Axioma 3. (Ley Distributiva)

$$x(y + z) = xy + xz, \qquad \forall x, y, z \in \mathbb{R};$$

Axioma 4. (Existencia de neutros)

$$\exists 0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \quad x + 0 = x;$$
$$\exists 1 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \quad x \cdot 1 = x;$$

Axioma 5. (Existencia de inversos aditivos)

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : \quad x + y = 0;$$

Axioma 6. (Existencia de inversos multiplicativos)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists y \in \mathbb{R} : \quad xy = 1.$$

Observación 1.3. Se puede probar que el inverso aditivo de un $x \in \mathbb{R}$ es único y entonces se lo denota como $-x \in \mathbb{R}$. Se puede probar que el inverso multiplicativo de un $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ es único y entonces se lo denota como $x^{-1} \in \mathbb{R}$.

Suposición 2. Existe un conjunto $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$, llamado conjunto de números *positivos*, tal que se cumplen los siguientes axiomas (**axiomas de orden**):

Axioma 7.

$$x, y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x + y \in \mathbb{R}^+ \wedge xy \in \mathbb{R}^+;$$

Axioma 8.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \quad x \in \mathbb{R}^+ \veebar -x \in \mathbb{R}^+;$$

Axioma 9.

$$0 \notin \mathbb{R}^+.$$

Notación 1.2. Los símbolos $<$, $>$, $\leqslant$ y $\geqslant$ se introducen de la siguiente manera: dados $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^+; \\ x > y &\Leftrightarrow y < x; \\ x \leqslant y &\Leftrightarrow x < y \veebar x = y; \\ x \geqslant y &\Leftrightarrow y \leqslant x. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Recordemos que nuestro objetivo era "tapar los hoyos" dejados por $\mathbb{Q}$. Esta tarea queda concluida cuando se presenta el Axioma del Supremo (o su equivalente el Axioma de Completitud), esto lo veremos más adelante.

Como ya se dijo, intuitivamente, el Axioma del Supremo permite llenar los vacìos que no son cubiertos por los nùmeros racionales. Una vez hecho esto, uno bien puede preguntarse si efectivamente es válido escribir la relación $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$. Esto se consigue de la siguiente manera. Para empezar, usando la Suposición 1 y el Axioma 4 tenemos la existencia del elemento $1 + 1 \in \mathbb{R}$, al que lo denotamos 2. Luego denotamos $3 = 2 + 1$ y procediendo así obtenemos $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$. Si a los elementos de $\mathbb{N}$ les añadimos sus inversos aditivos y $0 \in \mathbb{R}$ obtenemos $\mathbb{Z}$. Finalmente ponemos $\mathbb{Q} = \{p/q : \ p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Los "hoyos" son completados mediante el Axioma 10: al conjunto $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ se le conoce como el conjunto de los números **irracionales**. Son números irracionales

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 1,414213562373... \\ \pi &= 3,1415926535... \\ e &= 2,718281828459.... \end{aligned}$$

1.2.2. Propiedades

A partir de los axiomas de campo se pueden deducir todas las leyes del álgebra elemental. Los principales resultados están agrupados en el siguiente

Teorema 1.2. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.*

1. *Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.*
2. *El único $x \in \mathbb{R}$ que verifica $a + x = b$ es $b + (-a) = b - a$.*
3. $-(-a) = a$.
4. $a(b - c) = ab - ac$.
5. $a \cdot 0 = 0$.
6. *Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.*
7. *Si $a \neq 0$, el único $x \in \mathbb{R}$ que verifica $ax = b$ es $ba^{-1} = \frac{b}{a} = b/a$.*
8. *Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.*
9. *Si $ab = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$, es decir,*
10. $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = ab$.
11. *Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces*
$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$
12. *Si $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces*
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$
13. *Si $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces*
$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}.$$

Observación 1.4. En los puntos 2 y 7 introducimos notacionalmente las operaciones de *sustracción* y *división*, respectivamente.

A partir de los axiomas de orden se pueden derivar las reglas usuales para el manejo de desigualdades:

Teorema 1.3. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.*

1. $a < b \veebar a = b \veebar a > b$.
2. *Si* $a < b$ *y* $b < c$, *entonces* $a < c$.
3. *Si* $a < b$, *entonces* $a + c$.
4. *Si* $a < b$ *y* $c > 0$, *entonces* $ac < bc$.
5. *Si* $a \neq 0$, *entonces* $a^2 > 0$.
6. *Si* $a < b$ *y* $c < 0$, *entonces* $ac > bc$.
7. *Si* $a < b$, *entonces* $-a > -b$; *en particular, si* $a < 0$, *entonces* $-a > 0$.
8. $(ab > 0) \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \veebar (a < 0 \wedge b < 0)$.
9. *Si* $a < c$ *y* $b < d$, *entonces* $a + b < c + d$.

1.2.3. Intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. A los conjuntos

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\},$$
$$]a, b] = (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leqslant b\},$$
$$[a, b[= [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leqslant x < b\},$$

se les conoce como **intervalos finitos**. A $[a, b]$ se le llama **intervalo cerrado**. A los conjuntos (a, b), $[a, b)$ y $(a, b]$ se les llama, respectivamente, **intervalo abierto**, **intervalo cerrado a la izquierda** e intervalo cerrado a la derecha.

A los conjuntos

$$\begin{aligned}
[a,+\infty) &= \{x\in\mathbb{R}:\ a\leqslant x\},\\
(a,\infty) &= \{x\in\mathbb{R}:\ a< x\},\\
(-\infty,b) &= \{x\in\mathbb{R}:\ x< b\},\\
(-\infty,b] &= \{x\in\mathbb{R}:\ a\leqslant x\},
\end{aligned}$$

se les conoce como **intervalos infinitos**.

1.2.4. Valor Absoluto y Distancia

A la función

$$\mathbb{R}\ni x\longmapsto |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{si } x<0,\end{cases} \tag{1.6}$$

se le conoce como **valor absoluto**. Entonces, $|x|\geqslant 0$ es el valor absoluto de $x\in\mathbb{R}$. Esta función es de suma importancia pues mide el "tamaño" de su argumento y permite establecer la **distancia entre dos números reales** a y b:

$$\operatorname{dist}(a,b) = |a-b|, \tag{1.7}$$

así que en particular $|a|$ es la distancia de $a\in\mathbb{R}$ a 0.

No es difícil probar que dados $a,b\in\mathbb{R}$,

$$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|; \tag{1.8}$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|},\quad b\neq 0. \tag{1.9}$$

Observación 1.5. No es difícil probar que

$$|x| = \sqrt{x^2},\quad \forall x\in\mathbb{R}, \tag{1.10}$$

así que

$$\operatorname{dist}(x,y) = \sqrt{(x-y)^2} \tag{1.11}$$

Los símbolos $\sqrt{2}$, π (pi) y e (la base de los logaritmos neperianos) aparecen en todas las calculadoras científicas y son usualmente encontrados en los lenguajes de programación como constantes dadas. Sin embargo, ¿trabajan realmente estos dispositivos electrónicos con estos números irracionales? La respuesta es no. Una calculadora toma truncaciones aproximadas (usualmente referidas como el tipo de datos *float* o *double float*) esto es, puesto que todo dispositivo tiene (por limitaciones de memoria) una restricción en el número de cifras decimales que puede manipular, digamos n, entonces un número irracional (que necesariamente tiene infinitas cifras decimales) se aproxima con el número racional que resulta de tomar sólo las primeras n cifras decimales. De hecho, las computadoras no trabajan siquiera con $\mathbb{Q}$! Es natural preguntarse entonces qué tanto podemos confiar en los resultados obtenidos. La respuesta depende del grado de certeza necesario en el fenómeno bajo estudio. Por ejemplo, una variación de $0,1$ voltios podría ser fatal para un chip electrónico; pero si un astrónomo se equivocara en $0,1$ kilómetros al calcular el radio de una estrella lejana a nadie le importaría.

Todo lo anterior tiene que ver con el hecho de que $\mathbb{Q}$ es **denso** en $\mathbb{R}$; es decir, dado un número real x se puede hallar un número racional r tan cercano a x como se quiera. Esto se expone en el siguiente

Teorema 1.4. *Sea $x \in \mathbb{R}$, dado. Para todo $\epsilon > 0$, existe $r = r_\epsilon \in \mathbb{Q}$ tal que*

$$|x - r| \leqslant \epsilon. \tag{1.12}$$

De la definición de valor absoluto se sigue entonces que dado $M > 0$ el **conjunto solución de la ecuación**

$$|x| = M, \quad x \in \mathbb{R},$$

está dado por

$$CS = \{-M,\, M\}.$$

Teorema 1.5. *Si $a \geqslant 0$, entonces*

$$|x| \leqslant a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leqslant x \leqslant a, \tag{1.13}$$

$$|x| \geqslant a \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant a \;\vee\; x \leqslant -a. \tag{1.14}$$

Observación 1.6. Del teorema anterior se sigue que, dada $a \geqslant 0$, el **conjunto solución de la desigualdad**

$$|x| \leqslant a,$$

es

$$CS = [-a, a].$$

Y el conjunto solución de la desigualdad

$$|x| \geqslant a,$$

es

$$CS =]-\infty, -a] \cup [a, \infty[.$$

Teorema 1.6. *Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple la* ***desigualdad triangular****:*

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|. \tag{1.15}$$

La igualdad se alcanza si y sólo si $\operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y)$, *donde*

$$\mathbb{R} \ni a \longmapsto \operatorname{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & \text{si } a > 0, \\ 0, & \text{si } a = 0, \\ -1, & \text{si } a < 0, \end{cases}$$

es la ***función signo****.*

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, la relación $\operatorname{sgn}(a) = \operatorname{sgn}(b)$ expresa que a y b tienen el mismo signo (ambos positivos o ambos negativos) o que $a = b = 0$.

1.2.5. Acotamiento y el Axioma del Supremo

Todas las propiedades presentadas en los Teoremas 1.2 y 1.3 son verificadas en $\mathbb{Q}$. Por otro lado, dijimos que el Axioma del Supremo permite tapar los huecos dejados por $\mathbb{Q}$: a diferencia de $\mathbb{Q}$ podemos identificar los elementos de $\mathbb{R}$ con los puntos en una recta; para ello, basta con asignar a un punto en la recta el número 0 y escoger una escala de unidades al asignar a un punto (distinto al 0) el número 1.

Introduzcamos el concepto de acotación para poder presentar el Axioma del Supremo:

Definición 1.5. *Sea $M \subset \mathbb{R}$, no vacío. Se dice que M está* ***acotado superiormente*** *si existe un $b \in \mathbb{R}$ tal que*

$$x \leqslant b, \quad \forall x \in M;$$

se dice que b es una ***cota superior*** de M.

De manera análoga se definen los conceptos de **acotamiento inferior** y **cota inferior**.

Definición 1.6. *Se dice que un conjunto $M \subset \mathbb{R}$ está* ***acotado*** *si está acotado superior e inferiormente. Equivalentemente, M está acotado si existe $b > 0$ tal que*

$$|x| \leqslant b, \quad \forall x \in M.$$

Axioma del Supremo. Sea $M \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Entonces, existe

$$\sup M \in \mathbb{R}$$

tal que

1. $\sup M$ es cota superior de M;
2. si $r \in \mathbb{R}$, es una cota superior de M arbitraria, se tiene que $\sup M \leqslant r$.

Se dice que $\sup M$, la menor de las cotas superiores de M, es el **supremo** de M. En caso de que $\sup M \in M$ se dice que M tiene **máximo** y denotamos $\max M = \sup M$.

De manera análoga se define el **ínfimo** de un conjunto acotado inferiormente: será la mayor cota inferior. Si un conjunto acotado inferiormente contiene a su ínfimo se dice que tiene **mínimo**.

1.3. Los espacios $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

En la Sección 1.1 presentamos los conceptos de par ordenado y producto cartesiano. Nos interesa presentar en esta sección algunas ideas sobre los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^3 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

A un elemento $P = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$ se le llamará **punto en el plano**. A un elemento $Q = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ se le llamará **punto en el espacio**.

Definición 1.7. *Sean $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ puntos en el plano. Se dice que el número no-negativo*

$$dist(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \tag{1.16}$$

*es la **distancia euclidiana** entre P_1 y P_2. En particular, la distancia entre $P = (x, y)$ y $(0, 0)$ se denomina **módulo** o **norma** de P y se denota*

$$|P| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.17}$$

Definición 1.8. *Sean $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ puntos en el espacio. Se dice que el número no-negativo*

$$dist(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \tag{1.18}$$

*es la **distancia euclidiana** entre P_1 y P_2. En particular, la distancia entre $P = (x, y, z)$ y $(0, 0, 0)$ se denomina **módulo** o **norma** de P y se denota*

$$|P| = |(x, y, z)| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.19}$$

En las dos definiciones anteriores se generalizan las relaciones (1.11) y (1.10) que proveían respectivamente la distancia entre dos puntos en una recta y el valor absoluto de un número real.

Finalmente señalemos que la distancia de un punto $P = (x_1, y_1)$ a un conjunto no-vacío $D \subset \mathbb{R}^2$ está dada por

$$\text{dist}(P, D) = \text{ínf}\{\text{dist}(P, Q) : \ Q \in D\}.$$

Ejercicio 1.1. Sea L una recta en el plano y sea $P = (x_1, y_1)$ un punto cualquiera en el plano. Calcúlese la distancia de L a P.

En la Sección 1.1 presentamos el concepto de relación. Nos interesan algunos casos especiales de relaciones conocidos como **lugares geométricos del plano**.

Definición 1.9. *Sea $\mathcal{P}$ una proposición sobre los puntos del plano. Se dice que la relación*

$$L_{\mathcal{P}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \mathcal{P}(x, y)\} \tag{1.20}$$

*es el **lugar geométrico** de los puntos del plano que verifican $\mathcal{P}$.*

Ejemplo 1.6. Denotemos por C al lugar geométrico de los puntos que están a una distancia $h = 1$ de $(0, 0)$, el **origen del plano**. Entonces, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Es decir que en este caso el lugar geométrico buscado es la circunferencia de radio $h = 1$ centrada en $(0, 0)$.

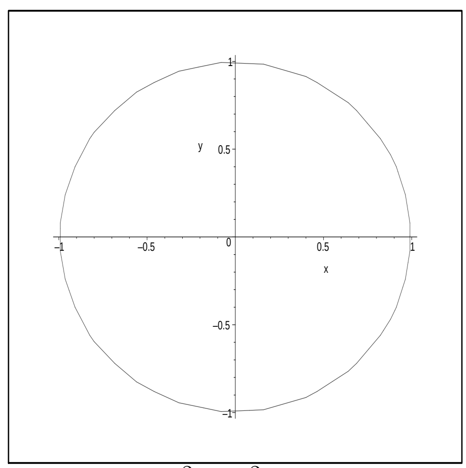


Fig. 1 $\quad C : x^2 + y^2 = 1.$

1.4. Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.2. Halle el ínfimo y el supremo de A. ¿Se tiene que $\inf A = \min A$? ¿Se tiene que $\sup A = \max A$?

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\}$;
2. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^3 < 8\}$;
3. $A = \{x^2 : \ x \in \mathbb{R}\}$;
4. $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x^3 \leqslant 8\}$;

Ejercicio 1.3. Sea S un subconjunto no-vacío de $\mathbb{R}$.

1. Pruebe que
$$\inf S = -\sup(-S),$$
donde $-S = \{-s : \ s \in S\}$.
2. Pruebe que para todo $T \supset S$,
$$\inf T \leqslant \inf S \leqslant \sup S \leqslant \sup T.$$

Ejercicio 1.4. Sean $a, b > 0$. Dada la relación $M \subset \mathbb{R}^2$, indique dominio, codominio, rango y si es función.

1. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax^2 + by^2 = 1\}$;
2. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax^2 + by^2 = 1, \ x \geqslant 0\}$;
3. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax^2 + by^2 = 1, \ x \leqslant 0\}$;
4. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax^2 + by^2 = 1, \ y \leqslant 0\}$;
5. $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ax^2 + by^2 = 1, \ y \geqslant 0\}$.

Ejercicio 1.5. Pruebe las relaciones (1.8) y (1.9).

Ejercicio 1.6. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $h > 0$. Hállese el lugar geométrico de los puntos que están a una distancia h de la recta
$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = ax + b\}.$$

Ejercicio 1.7. Hállese el lugar geométrico de los puntos del plano que son equidistantes de un punto fijo y de una recta fija en el plano.
Sugerencia. Disponga apropiadamente un sistema de coordenadas cartesianas respecto a la recta y el punto fijos.

Ejercicio 1.8. Hállese el lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que la suma de la distancia de P a dos puntos fijos Q_1 y Q_2 sobre el plano es constante.

Ejercicio 1.9. Hállese el lugar geométrico de los puntos P del plano, tales que la diferencia de las distancias de P a dos puntos fijos Q_1 y Q_2 sobre el plano es constante.

Ejercicio 1.10. Demostrar que

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

Ejercicio 1.11. (Propiedad Arquimediana) Demuestre que si $a > 0$ y $b > 0$, entonces se puede hallar $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Ejercicio 1.12. Para cada caso, halle el conjunto solución. A menos que se indique otra cosa se supone que $x \in \mathbb{R}$.

1. $\frac{2+x}{3} < 2 - x$;
2. $x^2 > x$;
3. $\frac{ax+c}{b} > d$, donde $c, d \in \mathbb{R}$ y $a, b < 0$;
4. $x(x - 3) > 0$;
5. $2x^2 + 5x + 2 > 0$;
6. $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ si $x > 0$;
7. $x^3 - 4x^2 - 27x + 90 > 0$;
8. $|x - a| < b$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$;
9. $|x - a| > b$, donde $a \in \mathbb{R}$ y $b > 0$;
10. $x^2 + x + 1 > 0$.

    Respuesta: $CS = \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.13. Utilice la observación x para hallar el conjunto solución

1. $|x-1| < |x+1|$;
   Respuesta: $CS = (0, \infty)$.
2. $|x-a| < |x+b|$, donde $0 < a < b$;
3. $|x-1| < |x+1| + |3x-2|$;
   Respuesta: $CS = \mathbb{R}$.
4. $|x^2 + x - 2| > |x-1|$;
   Respuesta: $CS = (-\infty, -3) \cap (-1, 1) \cap (1, \infty)$.
5. $|x-1| > 1 - x$;
6. $\left|\frac{2}{x+1}\right| \leqslant x$;
7. $2 < |x+3| \leqslant 5$;
8. $|x^2 - 1| - |x| < 5$;
9. $|x - 3a| \leqslant |x - a|$ con $a < 0$;
10. $|2x+1| - |x-2| = 4$.

Ejercicio 1.14. Resuelva el sistema

$$\begin{cases} 2x^2 \geqslant x, \\ \frac{2}{x} > x - 1. \end{cases}$$

CAPÍTULO 2

Funciones reales de variable real

En la Definición 1.2 se introdujeron de manera general los conceptos de relación, dominio, codominio y rango. En la Definición 1.3 se presentó el concepto de función como un caso particular de relación. Desde este momento nos interesan exclusivamente las así llamadas funciones reales de variable real:

Definición 2.1. *Sean I y J dos subconjuntos no-vacíos de $\mathbb{R}$. A toda función $f : I \longrightarrow J$ se dirá que es una **función real de variable real**.*

Observación 2.1. La frase "función real" indica que la variable dependiente toma sólo valores reales; en otras palabras, el dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$. La frase "de variable real" indica que la variable independiente toma también sólo variables reales; esto es, el codominio es un subconjunto de $\mathbb{R}$.

2.1. Dominio de definición o Máximo dominio

Como se ha visto al tratar con una función uno requiere de un dominio (de donde se toma la *materia prima*), un codominio (una lista que incluye a nuestros *productos*) y, usualmente, una regla (o *proceso*) que permite asociar a cada elemento del dominio un único elemento del codominio. Por tanto, expresiones (o reglas de cálculo) como

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 5x + 4, \\ g(x) &= 10^x, \\ h(x) &= \operatorname{sen} x, \end{aligned}$$

no son funciones pues no se prescribe los correspondientes dominios y codominios.

Definición 2.2. *Sea $f(x)$ una regla de cálculo. Se define el Dominio de Definición (o Máximo Dominio) de $f(x)$ como el más grande subconjunto de $\mathbb{R}$ donde la regla* tiene sentido, *esto es, donde se respetan las propiedades de los números reales y donde* $f(x)$ transforma reales en reales. *Esto puede notarse $DD[f(x)]$.*

Observación 2.2 (Regla del Máximo Dominio). Dada una regla de cálculo $f(x)$, si no se provée explícitamente dominio ni codominio deberá trabajarse con la función f definida como

$$DD[f(x)] \ni x \longmapsto f(x) \in \mathbb{R},$$

es decir, "$f(x)$ definida **sobre** su dominio de definición **a** valores reales". A partir de ese momento uno suele escribe el dominio simplemente como $\mathrm{Dom}(f)$ en lugar de $DD[f(x)]$.

2.2. Graficación de funciones

Puesto que una función real de variable real es un subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$, usualmente es posible describir un gráfico representativo. En lo más básico, para construir la gráfica de una función $f = f(x)$

1. Se establece una red suficientemente nutrida de puntos

$$M_i = (x_i,\, y_i), \quad i = 0, 1, 2, ..., N,$$

donde

$$\begin{aligned} x_i \in \mathrm{Dom}(f), &\quad \forall i = 0, 1, ..., N \\ x_0 < x_1 < x_2 < &\ldots < x_N, \\ y_i = f(x_i), &\quad \forall i = 1, ..., N. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2. Se une con líneas los puntos sucesivos.

Observación 2.3. Si hay un número suficientemente grande de puntos, la gráfica de f tenderá a ser una curva suave. [1]

Observación 2.4. En el caso en que $\mathrm{Dom}(f) = [a, b]$, $a < b$, se podría tomar

$$x_0 = a,$$
$$x_i = a + \frac{i(b-a)}{N}, \quad i = 1, 2, ..., N.$$

Recomendamos al estudiante aprender los rudimentos de graficación en calculadoras graficables y en algún software computacional. Los gráficos presentados a lo largo de este trabajo han sido preparados con **Scilab**, un paquete poderoso desarrollado por el *Institut National de Recherche en Informatique et Automatique* y que puede ser obtenido gratuitamente en

http://www.scilab.org

Ejemplo 2.1. Llamamos **función lineal** a toda función de la forma

$$\begin{aligned} L:\ \ I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = L(x) = mx + b, \end{aligned}$$

donde m y b son constantes reales. El gráfico de L cruza el eje de las Y en $(0, b)$. Si $m \neq 0$, el gráfico de L cruza el eje de las X en $(-b/m, 0)$. Si $m = 0$, la gráfica de L es una recta paralela al eje de las X. Además,

$$\mathrm{Rg}(L) = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{si } m \neq 0, \\ \{b\}, & \text{si } m = 0. \end{cases}$$

[1] Esto bajo el supuesto de que f es una función continua. El concepto de **continuidad** se introducirá más adelante en este trabajo.

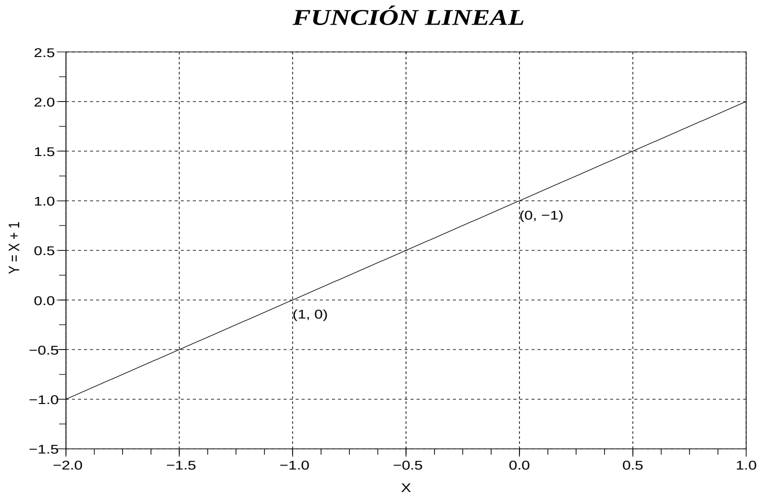


Fig. 2: Caso $m > 0$

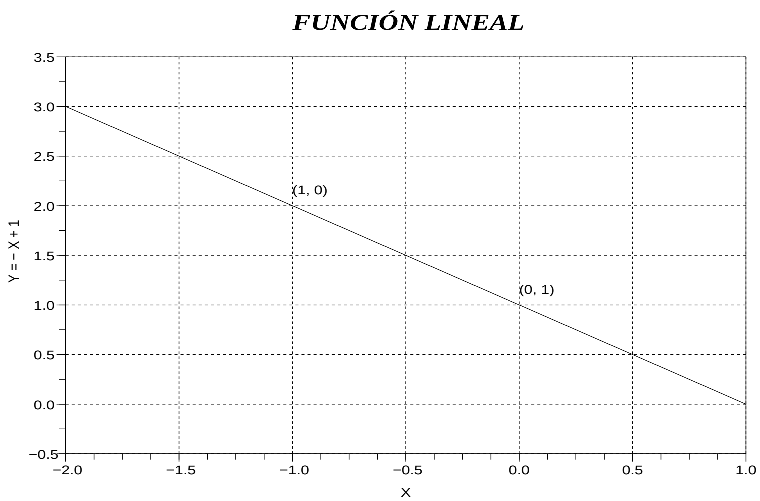


Fig. 3: Caso $m < 0$

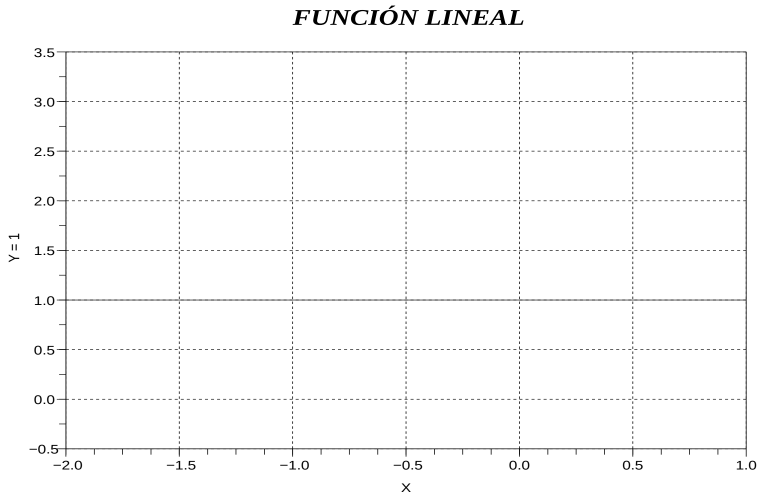


Fig. 4: Caso $m = 0$

Ejemplo 2.2. La relación

$$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 = x\}$$

no es función. Sin embargo su gráfico corresponde a unir los gráficos de dos funciones:

$$r_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 = x, \; y \geqslant 0\},$$
$$r_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 = x, \; y \leqslant 0\}.$$

Obsérvese que

$$\mathrm{Dom}(r) = \mathrm{Dom}(r_+) = \mathrm{Dom}(r_-) = \{x \in \mathbb{R} : \; x \geqslant 0\},$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Rg}(r) &= \mathbb{R}, \\ \mathrm{Rg}(r_+) &= \{y \in \mathbb{R} : \; y \geqslant 0\}, \\ \mathrm{Rg}(r_-) &= \{y \in \mathbb{R} : \; y \leqslant 0\}, \end{aligned}$$

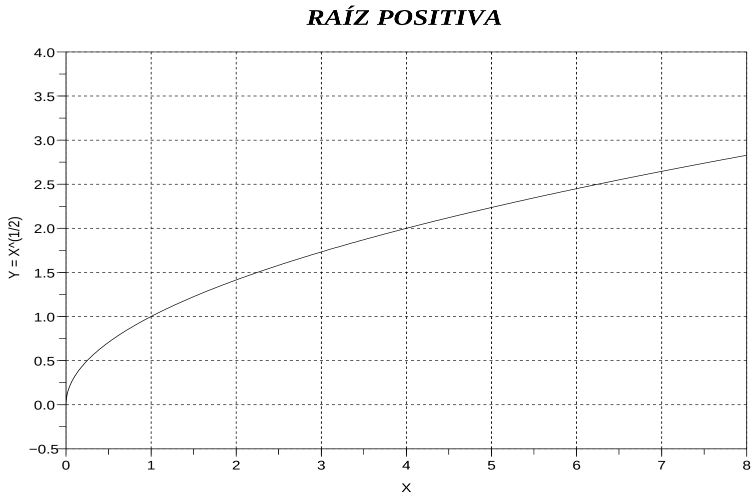


Fig. 5: La función r_+.

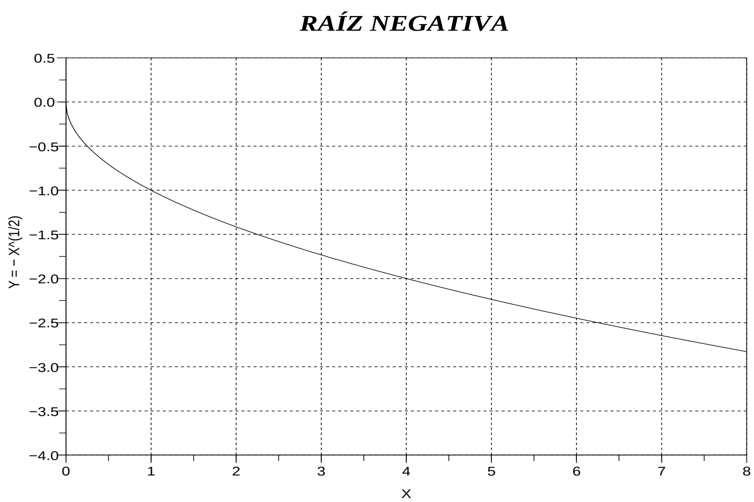


Fig. 6: La función r_-.

Ejemplo 2.3. La función signo, sgn, introducida en el Teorema 1.6 es una *función entera de variable real*. Puesto que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, la función signo es también una función real de variable real.

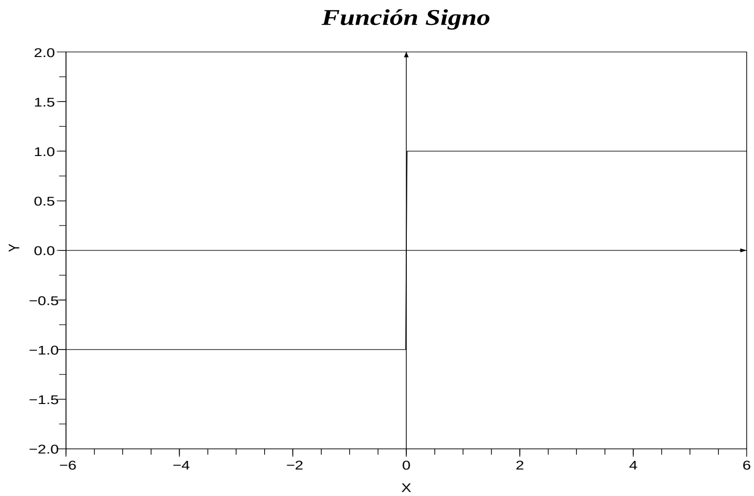


Fig. 7

No es difícil ver que

$$\mathrm{Dom}(\mathrm{sgn}) = \mathbb{R},$$

$$\mathrm{Cod}(\mathrm{sgn}) = \mathbb{R},$$

$$\mathrm{Rg}(\mathrm{sgn}) = \{-1, 0, 1\}.$$

Ejemplo 2.4. A toda función de la forma

$$\mathbb{R} \supset I \ni x \longmapsto p(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x^k \in \mathbb{R},$$

donde $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $a_k \in \mathbb{R}$, para $k = 0, 1, ..., N$, se le denomina **función polinomial** o simplemente **polinomio**.

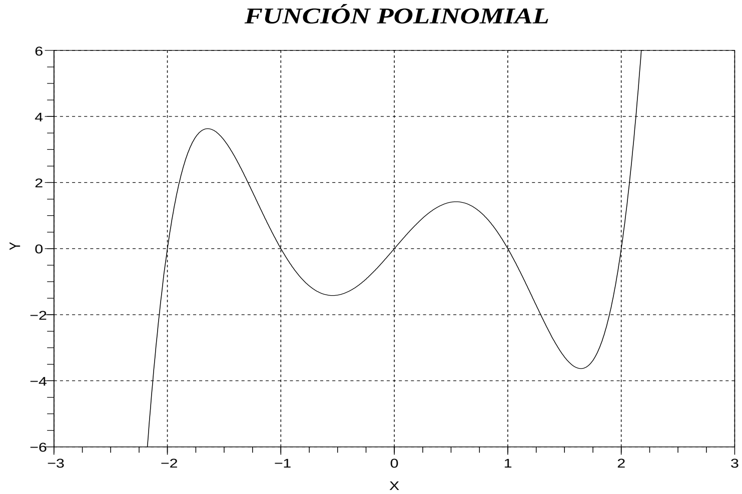


Fig. 8: $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x$

Ejemplo 2.5. El gráfico del polinomio

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

corresponde a una **parábola**. Se dice que f es una **función cuadrática**. Aquí

$$\mathrm{Rg}(f) = \begin{cases} [f(x_0), \infty), & \text{si } a > 0, \\ (-\infty, f(x_0)], & \text{si } a < 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

donde al valor

$$x_0 = -\frac{b}{2a} \tag{2.4}$$

se le conoce como el **punto crítico de** f. [2] Para bosquejar rápidamente el gráfico de f necesitamos además conocer el signo de su discriminante, Δ_f, definido como

$$\Delta_f = b^2 - 4ac. \tag{2.5}$$

[2]Más adelante definiremos puntos críticos para una gran variedad de funciones.

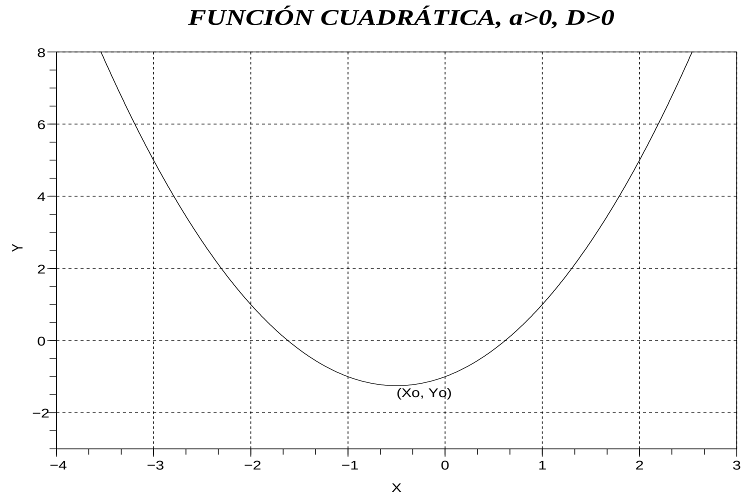

FUNCIÓN CUADRÁTICA, a>0, D>0
(Xo, Yo)
X
Y

Fig. 9

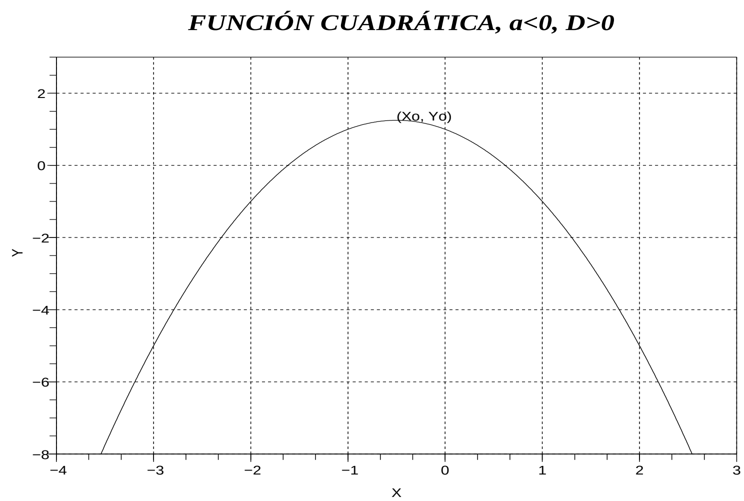

FUNCIÓN CUADRÁTICA, a<0, D>0
(Xo, Yo)
X
Y

Fig. 10

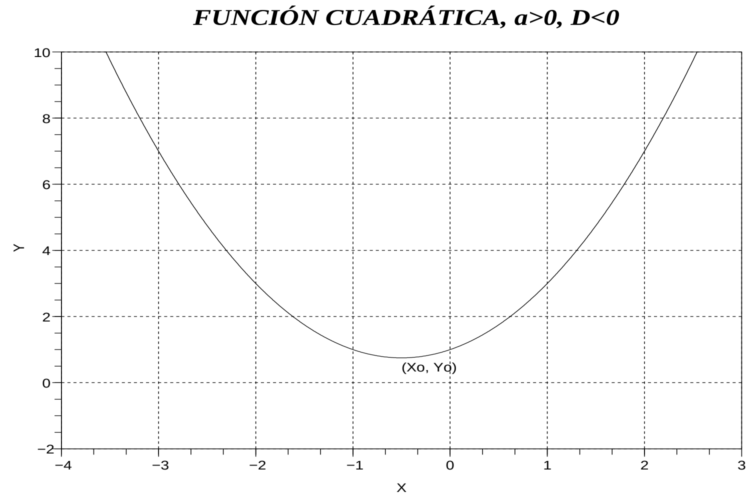

FUNCIÓN CUADRÁTICA, a>0, D<0
(Xo, Yo)
Y
X

Fig. 11

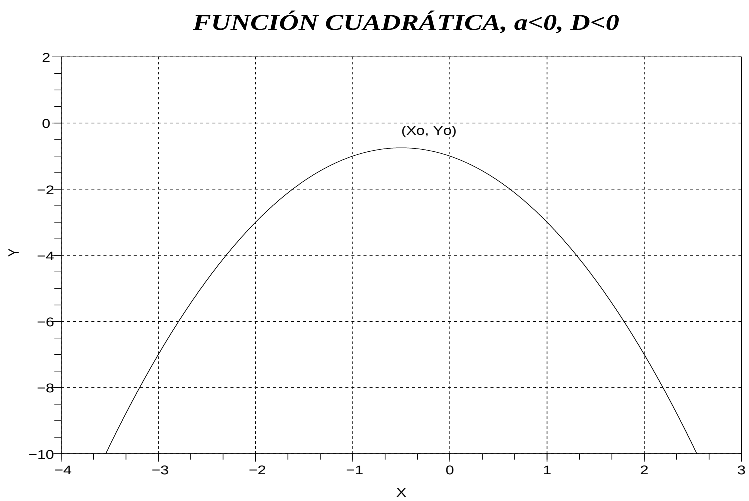

FUNCIÓN CUADRÁTICA, a<0, D<0
(Xo, Yo)
Y
X

Fig. 12

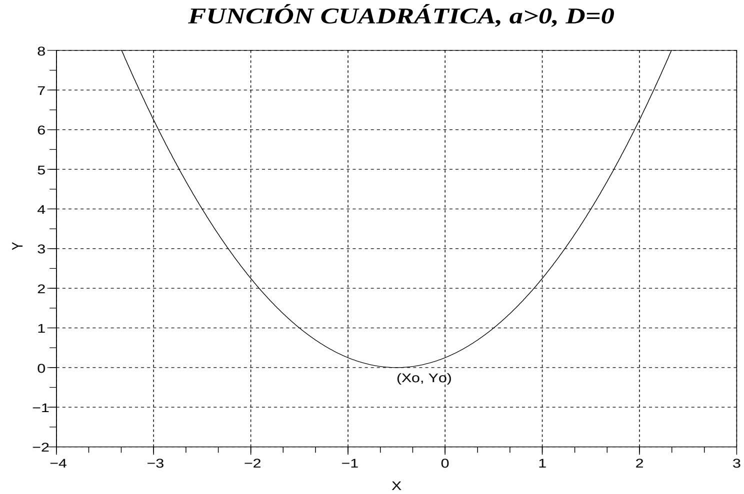

FUNCIÓN CUADRÁTICA, a>0, D=0
(Xo, Yo)
Y
X

Fig. 13

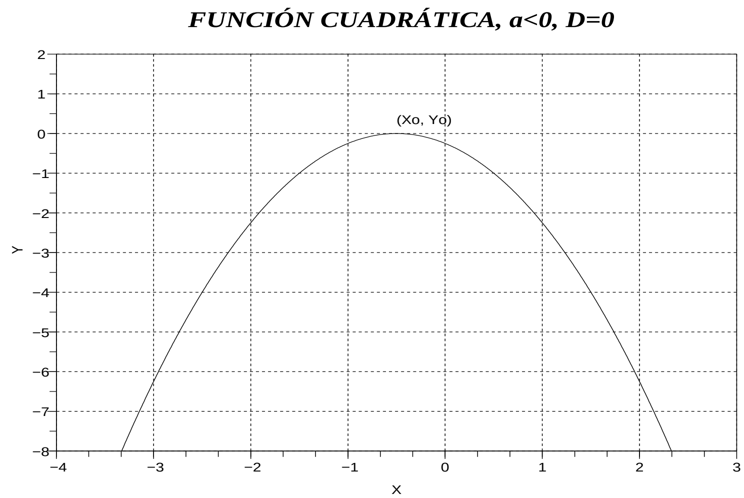

FUNCIÓN CUADRÁTICA, a<0, D=0
(Xo, Yo)
Y
X

Fig. 14

Ejemplo 2.6. Sea $a > 1$. A la función

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp_a(x) = a^x \in \mathbb{R},$$

se le llama **función exponencial de base** a. Es de mucha importancia el caso particular en que $a = e$ donde el número irracional

$$e = 2,718281828459...$$

es conocido como el número de Neper. En este caso se denota $\exp = \exp_e$ y se la refiere simplemente como **función exponencial**. Obsérvese que $\mathrm{Rg}(\exp_a) =]0, \infty[$.

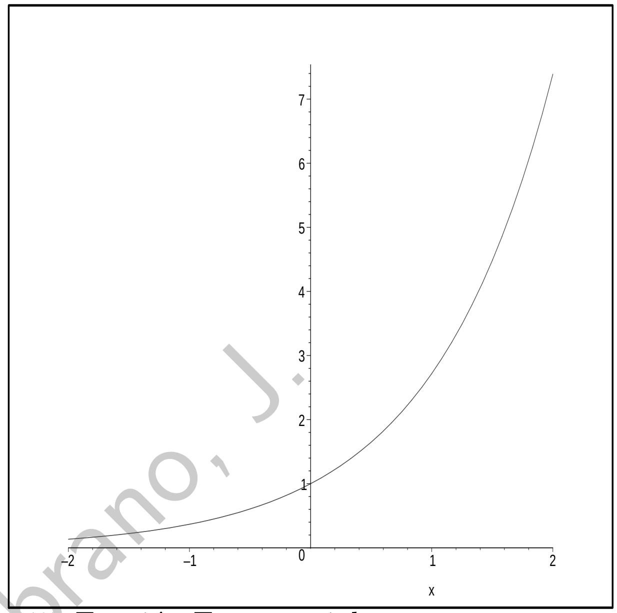


Fig. 15: Función Exponencial

Ejemplo 2.7. Sea $a > 1$. Dado $x > 0$, denotemos por $l = \log_a(x)$ el número tal que $a^l = x$. A la función $\log_a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ se le llama **función logarítmica de base a** o simplemente **logaritmo en base a**. Es de mucha importancia el caso particular en que $a = e$. En este caso se denota $\ln = \log_e$ y se la refiere como **logaritmo natural**. Obsérvese que $\mathrm{Rg}(\log_a) = \mathbb{R}$.

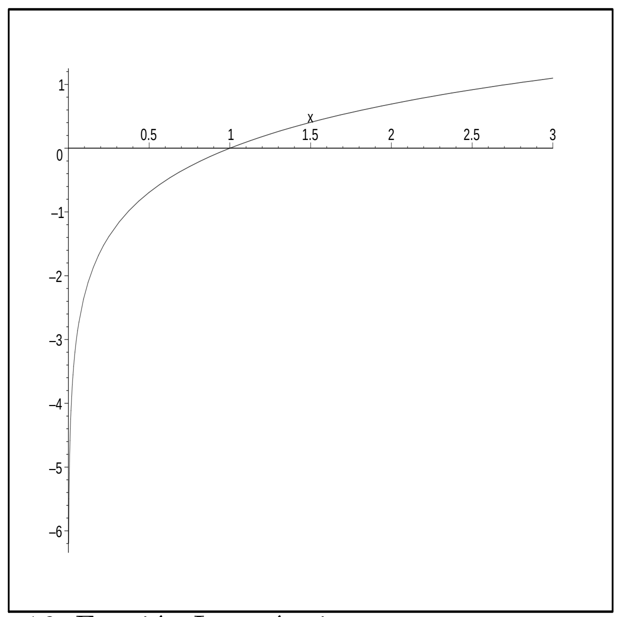


Fig. 16: Función Logarítmica

Ejemplo 2.8. Las funciones trigonométricas tienen múltiples aplicaciones en Ingeniería. Presentamos el gráfico de las función **Seno**, denotada sin. En la Sección 2.8 repasaremos brevemente las propiedades de las funciones trigonométricas.

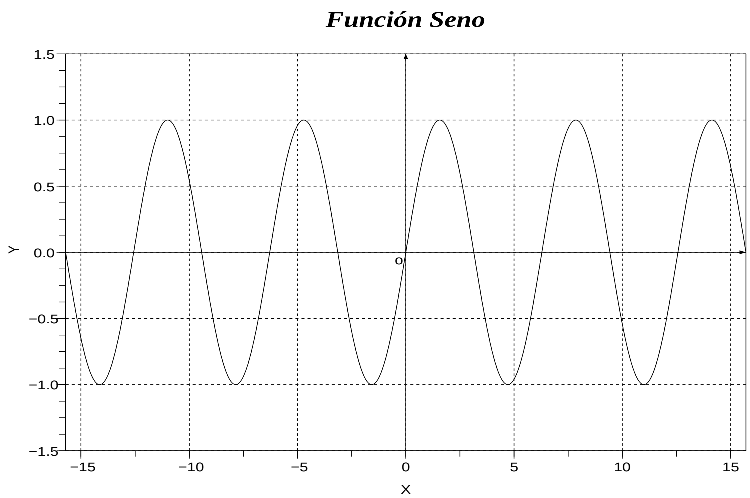


Fig. 17

2.3. Algebra de funciones

Sean f y g dos funciones reales definidas sobre $I \subset \mathbb{R}$, i.e.,

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \supset I \ni x & \longmapsto & f(x) \in \mathbb{R}, \\ \mathbb{R} \supset I \ni x & \longmapsto & g(x) \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Se definen las funciones $f+g$, $f \cdot g$ y f/g mediante

$$\begin{array}{rcl} f+g: \quad I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x); \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f \cdot g: \quad I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x); \end{array}$$

$$\begin{aligned} f/g: \quad I^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \end{aligned}$$

donde $I^* = \{x \in I : \ g(x) \neq 0\}$.

Observación 2.5. Cuando sólo se provée dos reglas de cálculo $f(x)$ y $g(x)$ se usa la anterior definición poniendo

$$I = DD[f(x)] \cap DD[g(x)].$$

Ejemplo 2.9. Consideremos las funciones seno, sin, y exponencial, exp (véase el Ejemplo 2.6). Obsérvese como se "mezcla" el efecto de estas funciones al hacer su producto.

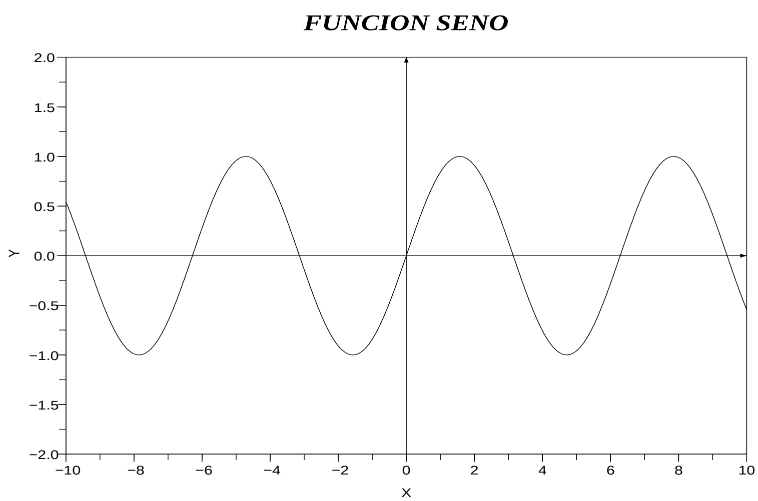


Fig. 18

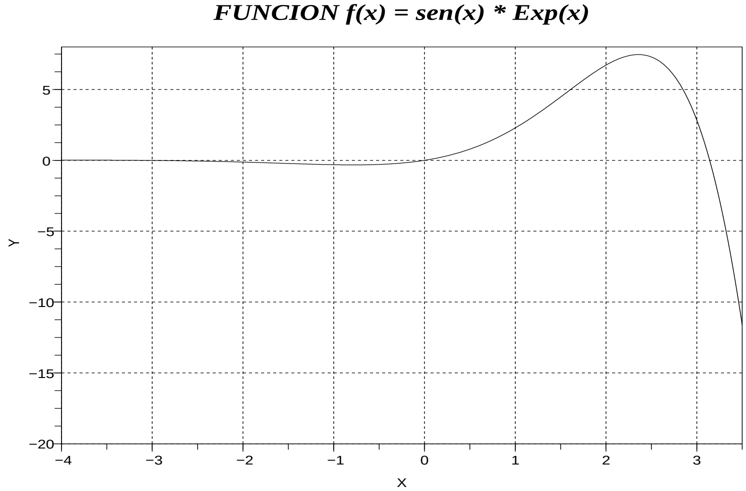


Fig. 19

2.4. Paridad

Recordemos que una función es el ejemplo más sencillo de modelo matemático. Puesto que un buen modelo es un reflejo bastante aproximado del comportamiento real de un fenómeno físico, financiero, biológico, etc., es importante extraer y utilizar el máximo de información posible sobre el fenómeno a partir del modelo. Entonces los conceptos de paridad, periodicidad, monotonía, invertibilidad, etc. son muy importantes porque permiten tomar decisiones con un ahorro de tiempo considerable. Por ejemplo,

- si una función es par o impar, basta con manejar la mitad derecha o izquierda de la función;
- si una función es periódica, basta con manejar la función en una región mucho más pequeña que el dominio;
- si una función es invertible, entonces existe un proceso (la función inversa) por el que los productos pueden reconvertirse en materia prima;
- si una función es monótona, entonces las imágenes sólo crecen o decrecen cuando nos desplazamos hacia la derecha.

El primer concepto que introducimos es el de **paridad**. Obsérvese que una función puede no ser par ni impar.

Definición 2.3. *Supongamos que $I = \mathbb{R}$ o bien $I = [-l, l]$ para algún $l > 0$. Se dice que*

$$\begin{aligned} f: \; I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f(x), \end{aligned}$$

*es **par** si se cumple que*

$$f(x) = f(-x), \quad \forall x \in I. \tag{2.6}$$

*Se dice que f es **impar** si*

$$f(x) = -f(-x), \quad \forall x \in I. \tag{2.7}$$

Gráficamente una función par es simétrica respecto al eje de las Y en tanto que una función impar es antisétrica.

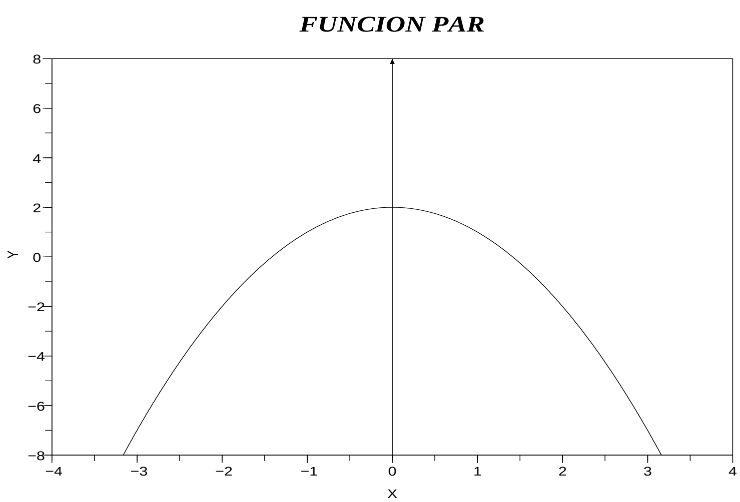


Fig. 20

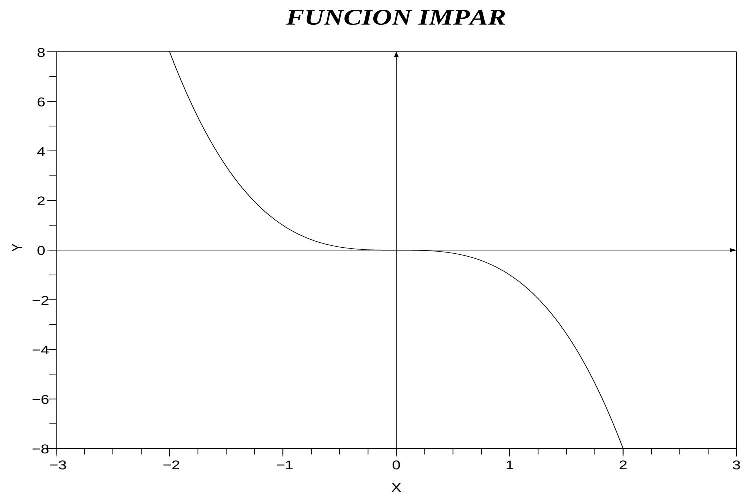


Fig. 21

Obsérvese que para una función impar, f, se cumple que $f(0) = 0$. Además se tiene la importante

> **Proposición 2.1.** *El producto de dos funciones pares o de dos impares es una función par, mientras que el producto de una función par por una impar es una función impar.*

2.5. Composición de funciones

Recordemos que una forma de interpretar una función es verla como un proceso que transforma materia prima en un cierto tipo de productos. La idea de *proceso compuesto*, esto es un proceso que resulta de aplicar sucesivamente procesos más *simples*, se expresa matemáticamente a través de la siguiente

Definición 2.4. *Sean*

$$\begin{aligned} f: \ I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g: \ J \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x), \end{aligned}$$

dos funciones tales que

$$J \supset \mathrm{Rg}(f),$$

se define la ***función compuesta*** *de g con f, denotada $g \circ f$, mediante*

$$\begin{aligned} g \circ f: \ I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)). \end{aligned}$$

Luego, si existen n funciones f_1, f_2,...,f_n tales que

$$\mathrm{Rg}(f_1) \subset \mathrm{Dom}(f_2), \ldots, \quad \mathrm{Rg}(f_{n-1}) \subset \mathrm{Dom}(f_n),$$

se pone

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1)(x) = f_n(f_{n-1}(\ldots(f_2(f_1(x))))).$$

2.6. Traslación y Cambio de Escala

Al trabajar con gráficos en un computador uno usualmente necesita **trasladar** o *mover el gráfico* de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo para captar alguna información que no se ve en pantalla. De la misma manera, a veces uno requiere *hacer un zoom* es decir hacer un cambio de escala para resaltar algún detalle (un *acercamiento*) o para tener una perspectiva más global (un *alejamiento*). ¿Cómo hace el computador para producir tales efectos? La respuesta es bastante simple hace una composición de funciones.

Presentamos a continuación este recurso matemático en su versión más simple. En toda esta sección trabajaremos con una función

$$\begin{aligned} f: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

Función f(x)

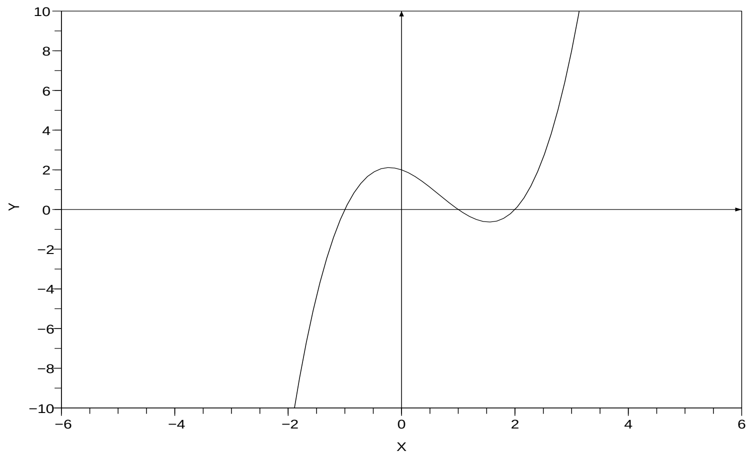


Fig. 22

2.6.1. Traslación en la variable independiente

Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se dice que la función

$$\begin{aligned} f_a: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f_a(x) = f(x-a), \end{aligned}$$

es la **traslación de f en x con centro en $x = a$**. Gráficamente se tiene un desplazamiento de tamaño $|a|$: **a)** hacia la derecha si $a > 0$, **b)** hacia la izquierda si $a < 0$.

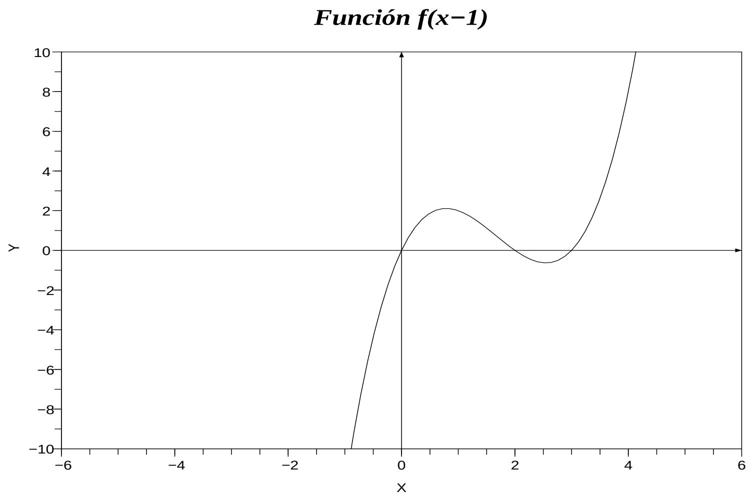


Fig. 23 - Desplazamiento a la derecha

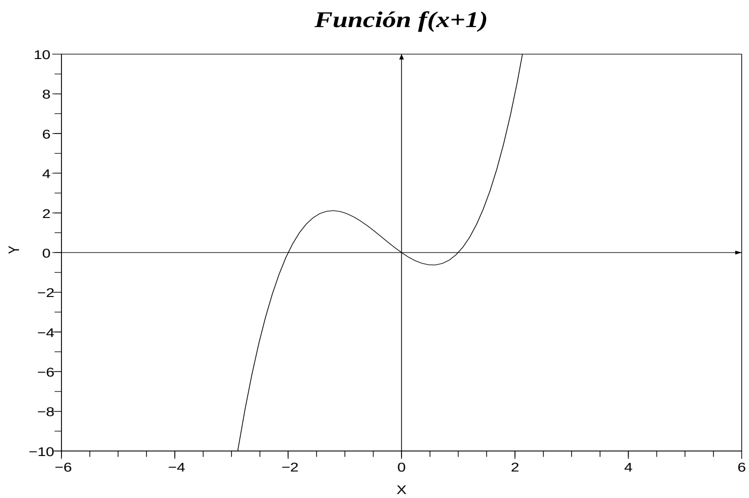


Fig. 24 - Desplazamiento a la izquierda

2.6.2. Traslación en la variable dependiente

Dado $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, se dice que la función

$$\begin{array}{rccl} f^b: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f^b(x) = f(x) + b, \end{array}$$

es la **traslación de** f **en** y **con centro en** $y = b$. Gráficamente se tiene un desplazamiento de tamaño $|b|$: **a)** hacia arriba si $b > 0$, **b)** hacia abajo si $b < 0$.

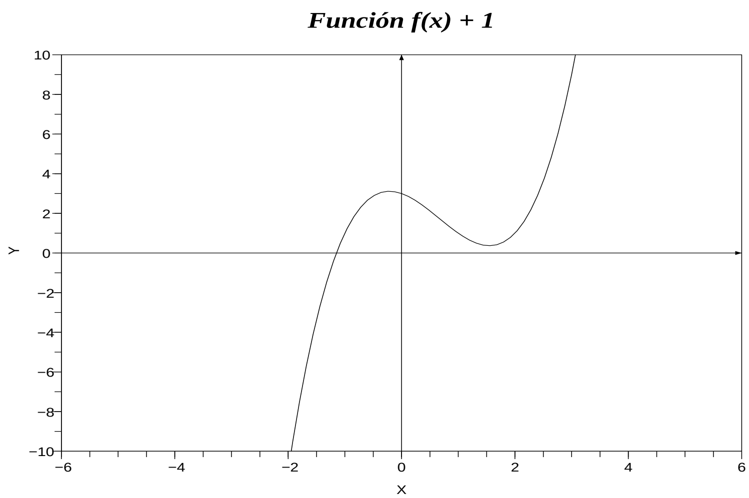


Fig. 25 - Desplazamiento hacia arriba

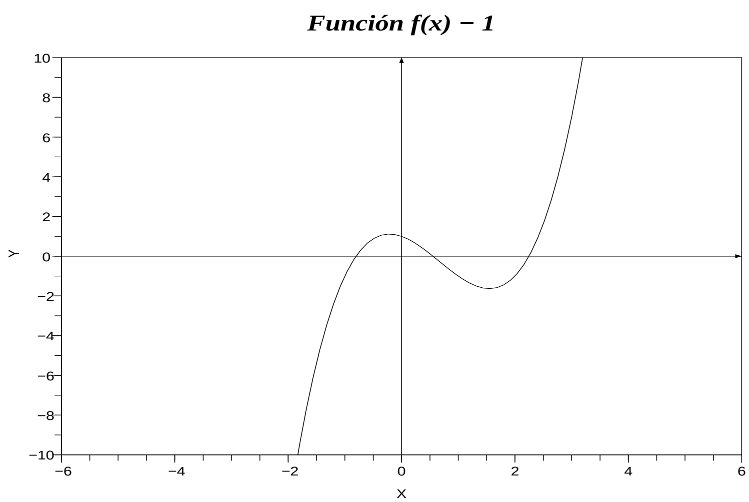


Fig. 26 - Desplazamiento hacia abajo

2.6.3. Cambio de escala en la variable independiente

Dado $a > 0$, se dice que la función

$$\begin{aligned} \hat{f}_a : \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \hat{f}_a(x) = f(a \cdot x), \end{aligned}$$

es el **cambio de escala de f en x con factor** a. Gráficamente se tiene una **contracción** si $a > 1$, y una **expansión** si $0 < a < 1$.

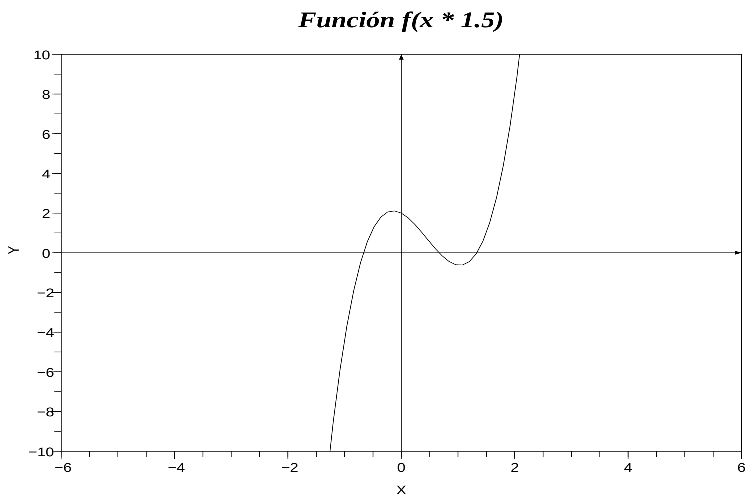


Fig. 27 - Contracción en el eje X

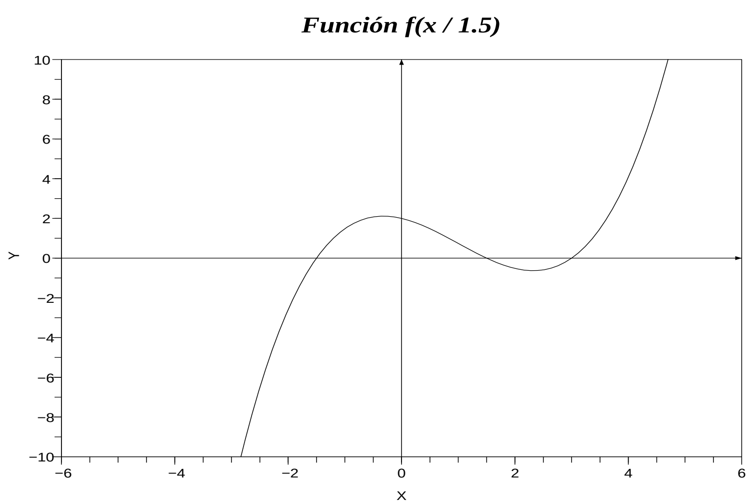


Fig. 28 - Expansión en el eje X

2.6.4. Cambio de escala en la variable dependiente

Dado $b > 0$, se dice que la función

$$\begin{array}{rccl} \hat{f}^b: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \hat{f}^b(x) = b \cdot f(x), \end{array}$$

es el **cambio de escala de f en y con factor** b. Gráficamente se tiene una **contracción** si $0 < b < 1$, y una **expansión** si $b > 1$.

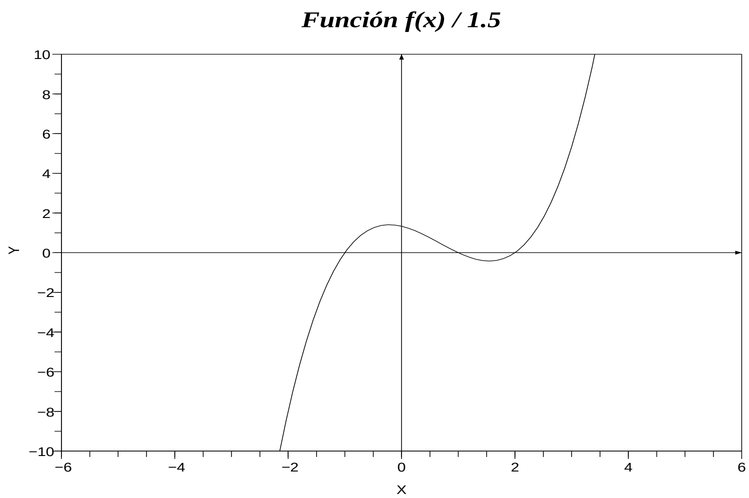


Fig. 29 - Contracción en el eje Y

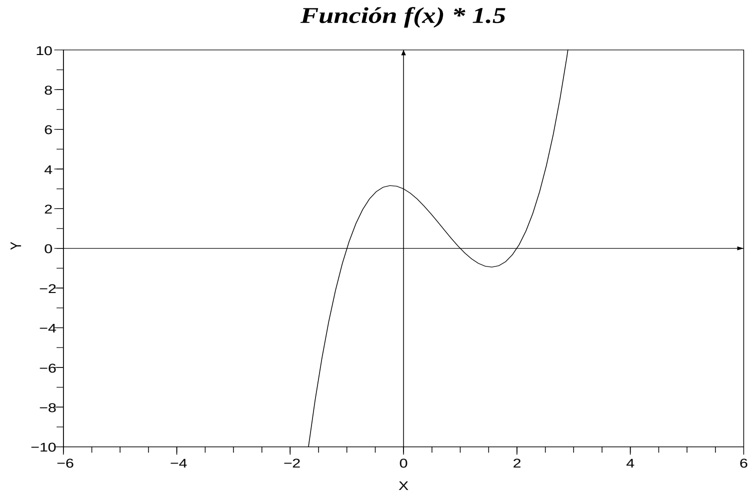


Fig. 30 - Expansión en el eje Y

2.6.5. Graficación via traslación y escalamiento

Supongamos que b y β son números reales y que a y α son positivos. Para graficar la función g definida por la fórmula

$$g(x) = \alpha \cdot f(ax - b) + \beta,$$

cuando se supone conocido el gráfico de la función f, se puede proceder de la siguiente manera:

1. se grafica $g_1 = \hat{f}_a$;
2. se grafica $g_2 = (g_1)_b$;
3. se grafica $g_3 = \widehat{(g_2)}^{\alpha}$;
4. se grafica $g = g_4 = (g_3)^{\beta}$.

Ejemplo 2.10. La función $y = e^{-x^2}$, llamada **campana de Gauss**, es una función con múltiples aplicaciones en Ingeniería, Física, Estadística, etc. A partir de su gráfico podemos graficar funciones como $g(x) = 2 \cdot e^{(x+1)^2} + 1$, siguiendo los pasos recién descritos:

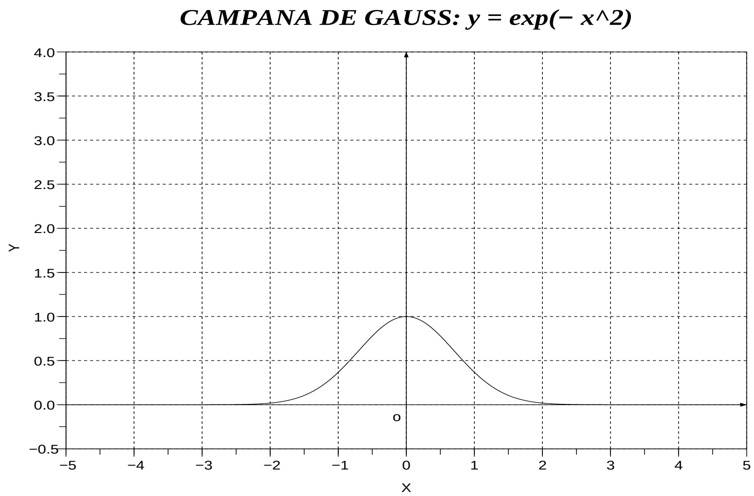

CAMPANA DE GAUSS: y = exp(− x^2)
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
Y
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
X
o

Fig. 31

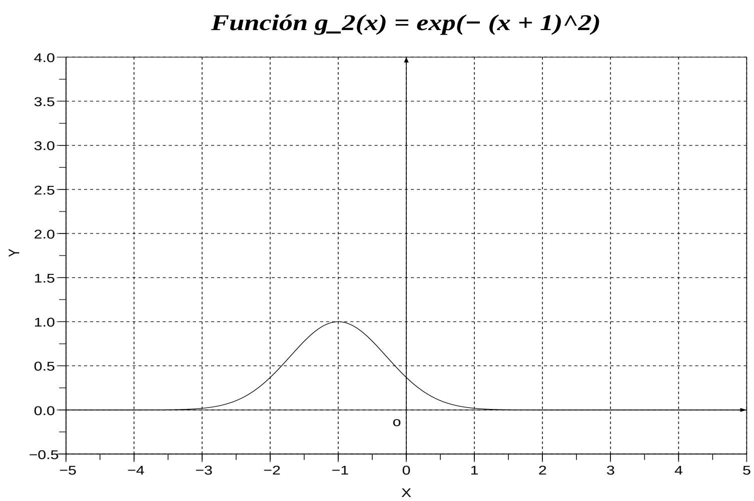

Función g_2(x) = exp(− (x + 1)^2)
4.0
3.5
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
Y
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
X
o

Fig. 32

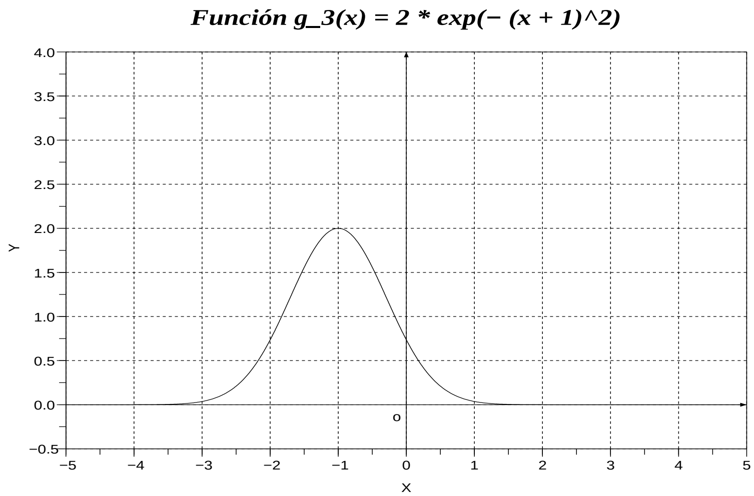


Fig. 33

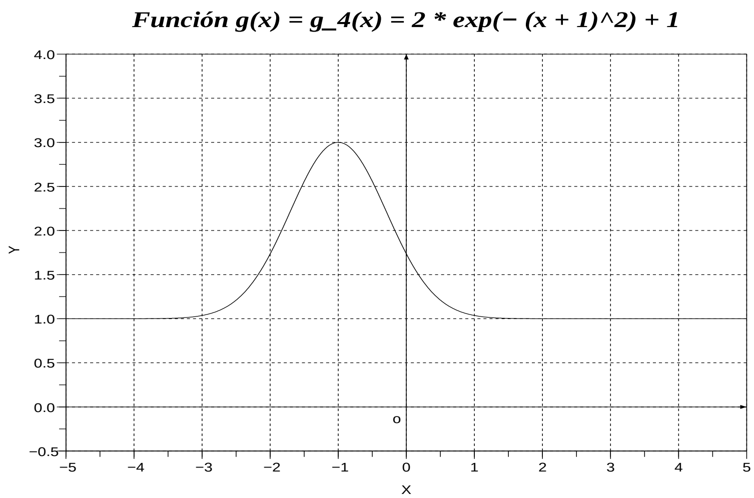


Fig. 34

2.7. Función inversa

Recordemos que una función f puede interpretarse como un proceso que transforma materia prima en productos. Digamos que a partir de plástico producimos bolsas; surge la pregunta, ¿bajo que circunstancias es posible recuperar la materia prima a partir de los productos? es decir ¿como reciclar plástico desechado y usado para tener nuevamente materia prima de calidad? Es intuitivo el hecho de que no siempre es posible encontrar un **proceso inverso**. Matemáticamente, buscamos condiciones sobre la función f de manera que tenga una **función inversa**. Siguiendo nuestro ejemplo del plástico, se hace claro que buscamos una función g tal que

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x, \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f), \\ f(g(y)) &= y, \quad \forall y \in \mathrm{Dom}(g). \end{aligned}$$

Los ingredientes buscados son los conceptos de inyectividad y sobreyectividad que a continuación presentamos. Luego, como ejemplo, llamamos de vuelta a las funciones exponencial y logarítmica.

Observación 2.6. Es importante resaltar que las definiciones siguientes (inyectividad, sobreyectividad y biyectividad) son generale y no se limitan al ámbito de las funciones reales de variable real.

2.7.1. Sobreyectividad

Nuestro primer ingrediente corresponde al hecho de que no deben sobrar elementos en el conjunto de salida de una función. Esta condición, al trasladarse a una potencial función inversa, se establece en la siguiente

Definición 2.5. *Una función f se dice* ***sobreyectiva*** *si su rango coincide con su codominio, es decir, si $\mathrm{Cod}(f) = \mathrm{Rg}(f)$. Equivalentemente, la función f es sobreyectiva si, para cada $y_0 \in \mathrm{Cod}(f)$, existe al menos un $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ tal que $y_0 = f(x_0)$.*

Observación 2.7. Dada una función cualquiera $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathrm{Cod}(f)$ se puede redefinirla para que quede sobreyectiva: reemplazando su codominio con su rango. Más exactamente, en lugar de trabajar con f uno podría trabajar casi equivalentemente con

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \ \mathrm{Dom}(f) &\longrightarrow \mathrm{Rg}(f) \\ x &\longmapsto \tilde{f}(x) = f(x). \end{aligned}$$

Observación 2.8. Si dada una función f queremos verificar que es sobreyectiva debemos tomar un elemento $y_0 \in \operatorname{Cod}(f)$, arbitrario, y hallar al menos una solución para la ecuación

$$f(x) - y_0 = 0. \tag{2.8}$$

Por otro lado, basta hallar un $y_0 \in \operatorname{Cod}(f)$ para el que la ecuación (2.8) no tenga solución para concluir que la función f no es sobreyectiva.

Ejemplo 2.11. La función

$$\begin{aligned} p: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto p(x) = x^2, \end{aligned}$$

no es sobreyectiva. En efecto, basta tomar cualquier $y_0 < 0$ y constatar que no existe solución para (2.8).

2.7.2. Inyectividad

Nuestro segundo ingrediente tiene que ver con el hecho de que a cada elemento del conjunto de salida debe corresponderle un único elemento en el conjunto de llegada para que una relación f sea función. Esta caracterísa, transportada a una potencial función inversa corresponde a la siguiente

Definición 2.6. *Una función f se dice* ***inyectiva*** *si a cada elemento del rango le corresponde un único elemento del dominio. Esto equivale a decir que para cada $y_0 \in \operatorname{Rg}(f)$, existe un* ***único*** *$x_0 \in \operatorname{Dom}(f)$ tal que $y_0 = f(x_0)$.*

Observación 2.9. Si dada una función f queremos verificar que es inyectiva debemos tomar un elemento $y_0 \in \operatorname{Rg}(f)$, arbitrario, y mostrar que existe una única solución para la ecuación (2.8). Por otro lado, basta hallar un $y_0 \in \operatorname{Rg}(f)$ para el que la ecuación (2.8) no tenga solución única para concluir que la función f no es inyectiva.

Ejemplo 2.12. La función

$$\begin{aligned} p: \ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cap \{0\} \\ x &\longmapsto p(x) = x^2, \end{aligned}$$

no es inyectiva. En efecto, basta tomar cualquier $y_0 > 0$ y constatar que los números $x_1 = \sqrt{y_0}$ y $x_2 = -\sqrt{y_0}$ son soluciones de (2.8).

2.7.3. Biyectividad

Decimos que una función f es **biyectiva** si es, a la vez, inyectiva y sobreyectiva. En tal caso, a cada elemento $y \in \mathrm{Cod}(f) = \mathrm{Rg}(f)$ le corresponde un único $x \in \mathrm{Dom}(f)$ y entonces podemos definir la función

$$\begin{aligned} f^{-1}: \quad \mathrm{Rg}(f) &\longrightarrow \mathrm{Dom} f \\ y &\longmapsto f^{-1}(y) = x, \end{aligned}$$

que llamaremos **función inversa de** f.

Proposición 2.2. *Sea f una función biyectiva. Se tiene que*

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) = x, &\quad \forall x \in \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Rg}(f^{-1}), \\ f(f^{-1}(y)) = y, &\quad \forall y \in \mathrm{Dom}(f^{-1} = \mathrm{Dom} f). \end{aligned}$$

Observación 2.10. En virtud de la Observación 2.7, se hace claro que para verificar que una función f es biyectiva (y que por ende tiene inversa) la condición más difícil de probar es su inyectividad. Por ello, a una función que es inyectiva pero no sobreyectiva se le suele referir como **invertible**. Esto quiere decir que basta redefinir a dicha función como se menciona en la Observación 2.7 para conseguir una función biyectiva.

Ejemplo 2.13. La función

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = x^3, \end{aligned}$$

es biyectiva.

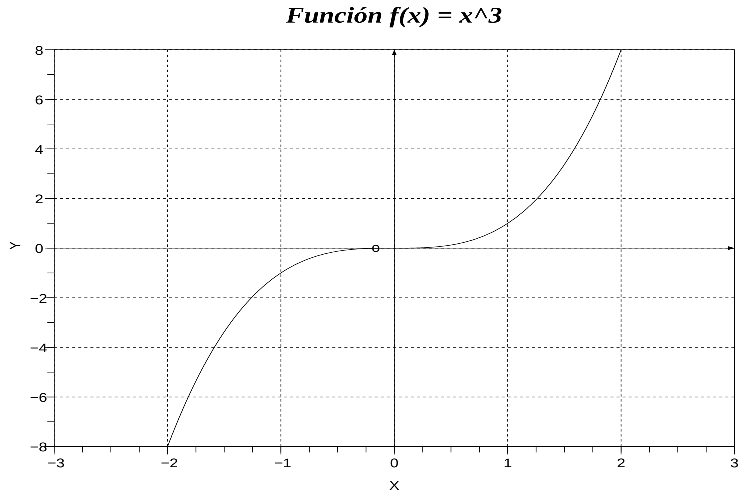


Fig. 35 Ejemplo de función biyectiva

2.7.4. La función exponencial y la función logarítmica

Como ejemplo de funciones biyectivas, retomamos ahora las funciones exponencial y logarítmica que fueron ya presentadas en los Ejemplos 2.6 y 2.7. Dado $a > 1$, consideramos entonces las funciones

$$\begin{aligned} \exp_a : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto \exp_a(x) = a^x, \\ \log_a : \quad \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a(x). \end{aligned}$$

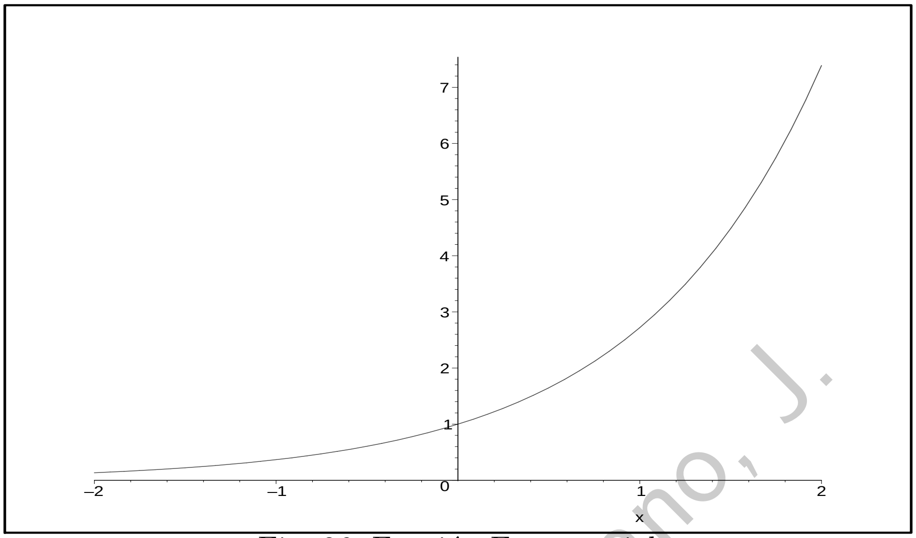


Fig. 36: Función Exponencial

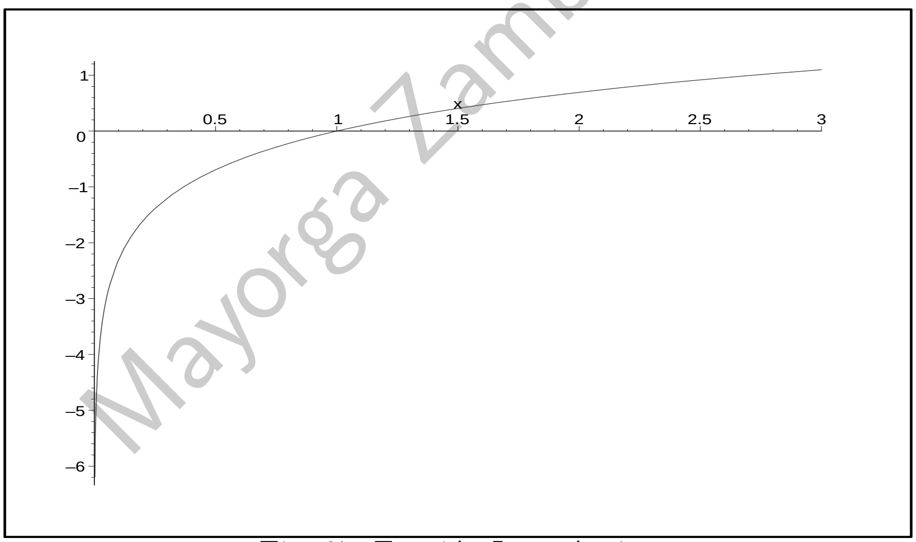


Fig. 37: Función Logarítmica

En las siguientes proposiciones presentamos las propiedades básicas de las funciones exponencial y logarítmica

Proposición 2.3. *Sea $a > 0$. Se tiene que*

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$;
2. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}$;
3. $\exp_a(x) = 1$ *si y sólo si* $x = 0$.

Proposición 2.4. *Sea $a > 1$. Se tiene que*

1. $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$, *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^+$;
2. $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$;
3. $\log_a(x) = 0$ *si y sólo si* $x = 1$;
4. $\log_a(x) > 0$ *si y sólo si* $x \in (1, +\infty)$;
5. $\log_a(x) < 0$ *si y sólo si* $x \in (0, 1)$;
6. *Las funciones* $\exp_a$ *y* $\log_a$ *son inversas una de la otra así que*

$$\log_a(a^x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \tag{2.9}$$
$$\exp_a(\log_a(x)) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.10}$$

En el siguiente gráfico superponemos las funciones $\exp_a$ y $\log_a$. Además graficamos la **función identidad**, Id, es decir la función definida mediante $Id(x) = x$. Como se puede ver la exponencial y su inversa son simétricas respecto a Id. Esta propiedad es de hecho general:

Proposición 2.5. *Si la función real de variable real f es biyectiva, entonces los gráficos de f y f^{-1} son simétricos respecto a la función identidad, Id.*

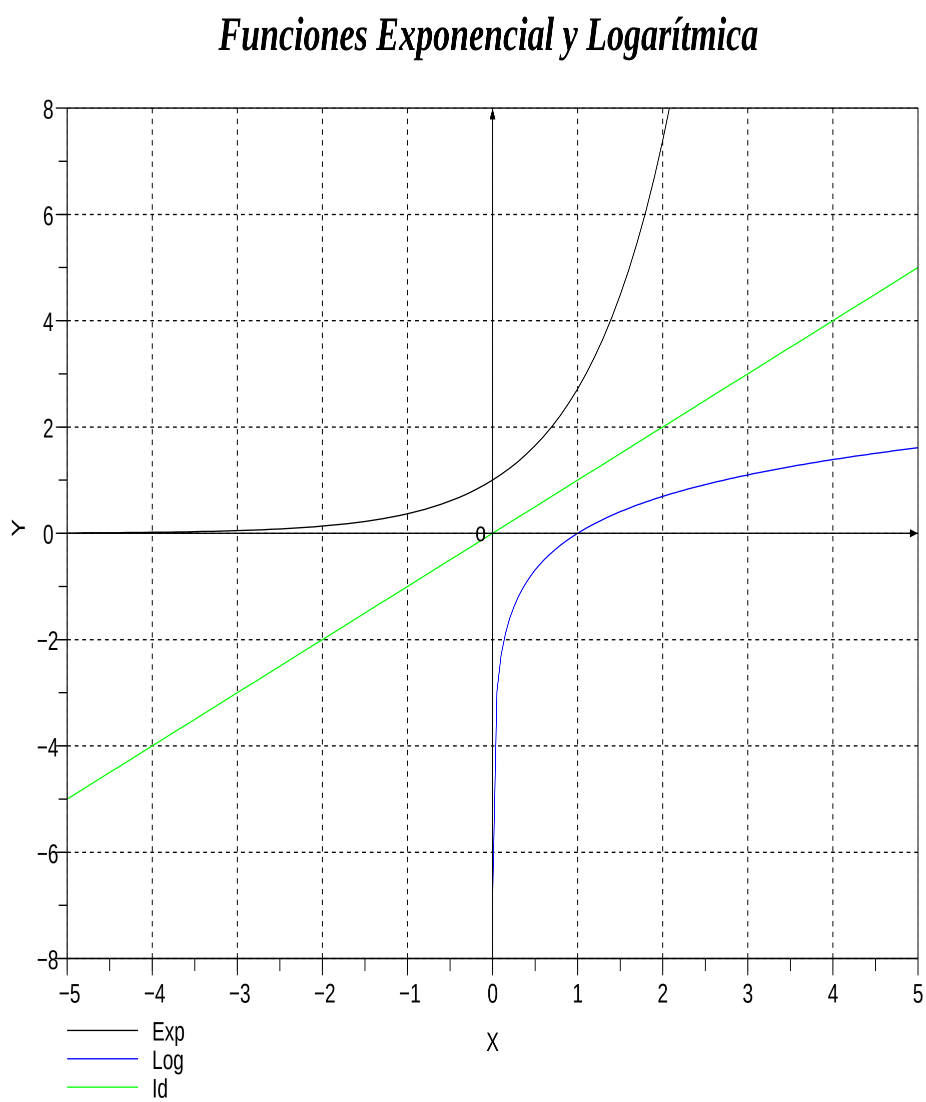


Fig. 38: Una función biyectiva y su inversa

2.8. Periodicidad

En la naturaleza hay muchos fenómenos que presentan un comportamiento cíclico o periódico: el paso de dia a noche, las estaciones, la fertilidad femenina, etc. Asimismo, hay fenómenos que presentan un comportamiento periódico en Economía (la tasa de desempleo), Ingeniería (las ondas de radio), etc.

Si somos estrictos, no existen fenómenos completamente periódicos, pues siempre se presentan distorsiones (aunque sean ligeras) al período. Por tanto cuando modelamos matemáticamente un fenómeno debemos considerar que una vez más contaremos sólo con una aproximación de la realidad en base a una información limitada. A pesar de esta limitación el valor agregado que se obtiene al manejar la toma de decisiones de una manera técnica - usando herramientas matemáticas - es enorme cuando se trata de ahorrar costos y maximizar liquidez.

Matemáticamente, el modelo más simple que permite modelar un fenómeno (casi)-periódico es el presentado en la siguiente

Definición 2.7. *Se dice que una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *es* ***periódica*** *si existe un número* $p > 0$ *tal que*

$$f(x + p) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

En este caso, llamamos ***período*** *de* f*, denotado* per$[f]$*, al número positivo más pequeño que verifica la relación (2.11).*

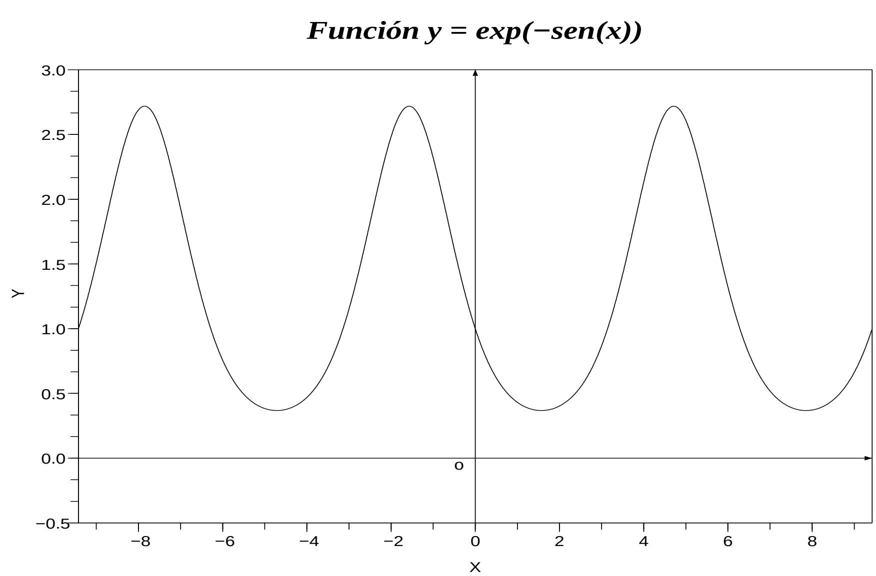


Fig. 39 Ejemplo de función periódica.

2.9. Funciones Trigonométricas

Las funciones trigonométricas son periódicas. No es nuestro propósito hacer una presentación completa de Trigonometría; para eso hay muchos buenos libros de texto y manuales (véase por ejemplo [10]). Nuestro objetivo es recalcar su importancia haciendo un pequeño resumen.

Para empezar recordemos que las funciones trigonométricas son funciones reales de variable real. Su argumento puede interpretarse como un ángulo que normalmente se describe en radianes y no en grados sexagesimales. Se tiene que

$$180^o = \pi \text{ rad} = \pi. \tag{2.12}$$

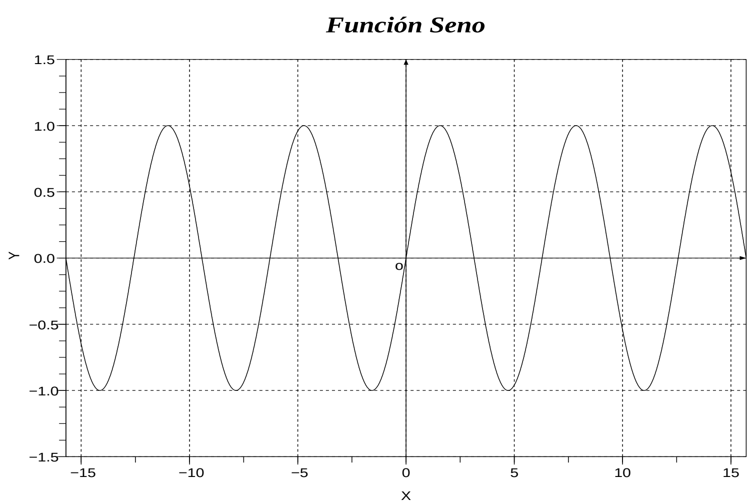


Fig. 40

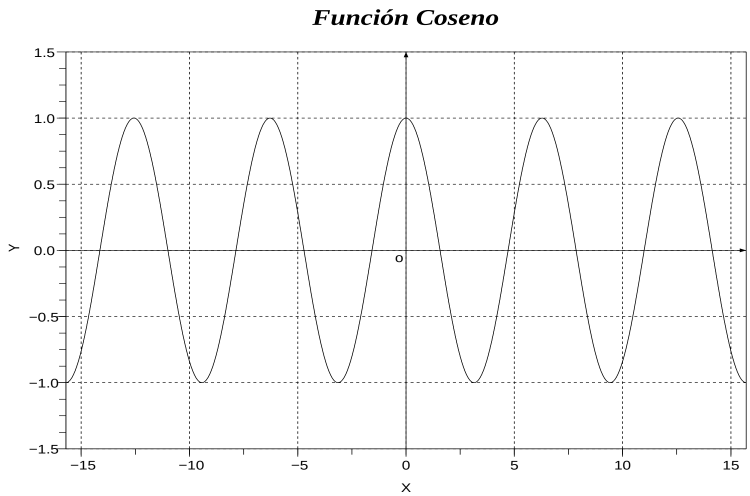

Función Coseno
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
Y
o
−15
−10
−5
0
5
10
15
X

Fig. 41

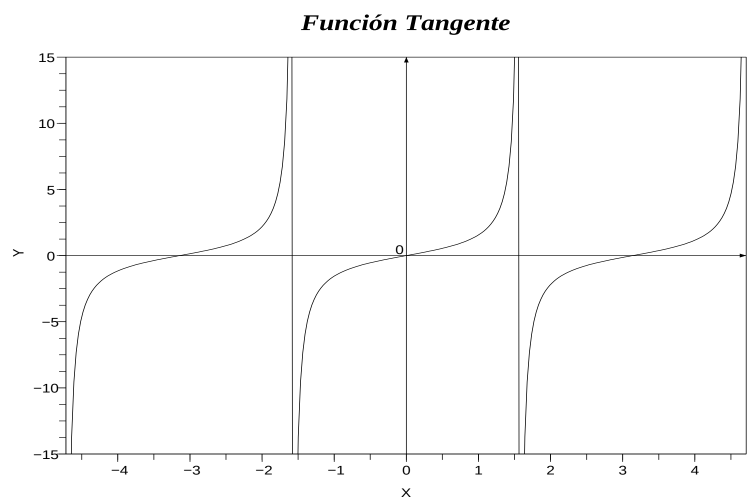

Función Tangente
15
10
5
0
−5
−10
−15
Y
0
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
X

Fig. 42

Función Cotangente

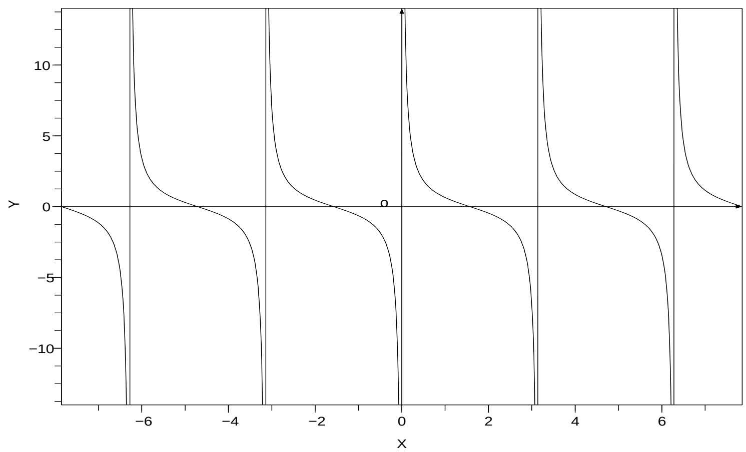


Fig. 43

Función Cosecante

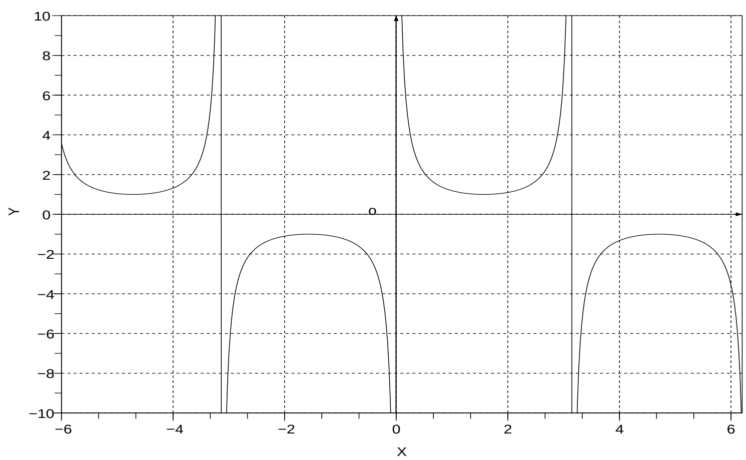


Fig. 44

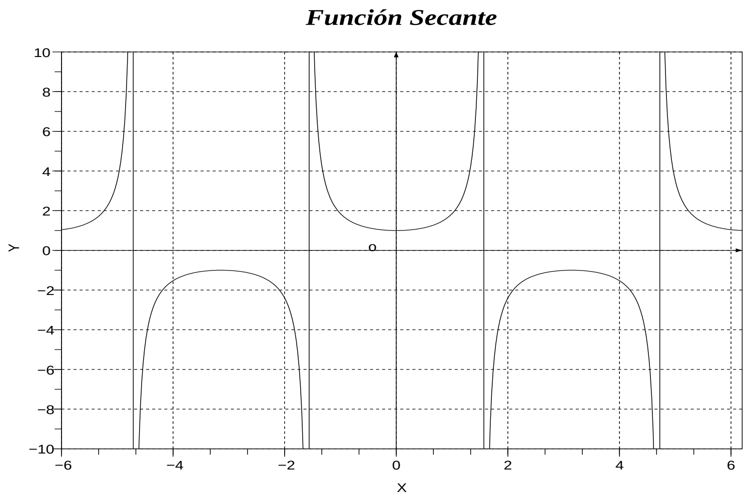


Fig. 45

Observación 2.11. Llamamos **razones trigonométricas** de un ángulo a los valores que toman las funciones trigonométricas seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente en dicho ángulo. Si bien son seis las funciones trigonométricas, en la práctica uno maneja expresiones y funciones conteniendo sólo sin, cos y tan.

Observación 2.12. Se tiene que

$$\mathrm{per}[\sin] = \mathrm{per}[\cos] = \mathrm{per}[\sec] = \mathrm{per}[\mathrm{cosec}] = 2\pi, \tag{2.13}$$

$$\mathrm{per}[\tan] = \mathrm{per}[\mathrm{cotg}] = \pi. \tag{2.14}$$

A partir de los gráficos es bastante claro que ninguna de las funciones trigonométricas es invertible. Sin embargo, si redefinimos conseguimos biyectividad a la vez que se mantiene toda la información esencial. Cuando hablamos de las funciones ArcoSeno, $\arcsin = \sin^{-1}$, ArcoCoseno, $\arccos = \cos^{-1}$ y ArcoTangente, $\arctan = \tan^{-1}$ nos referimos a las inversas de

$$\begin{aligned}
\sin: \quad [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1] \\
x &\longmapsto \sin(x), \\
\cos: \quad [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\
x &\longmapsto \cos(x), \\
\tan: \quad (-\pi/2, \pi/2) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \tan(x),
\end{aligned}$$

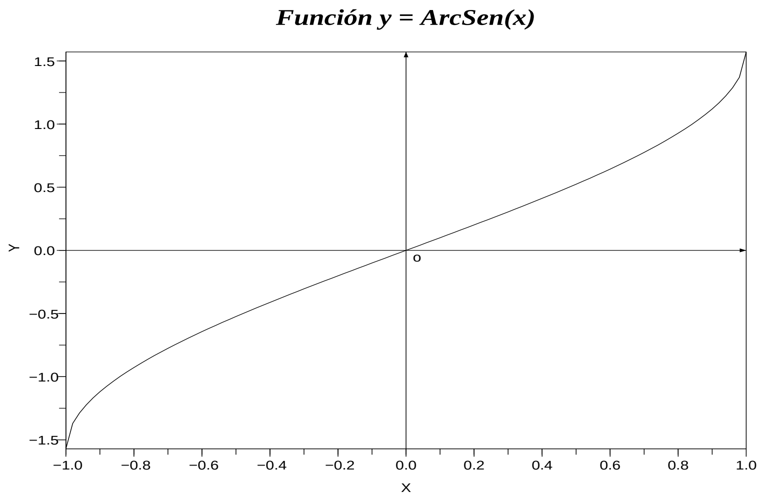

Función y = ArcSen(x)
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
Y
o
−1.0
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
X

Fig. 46

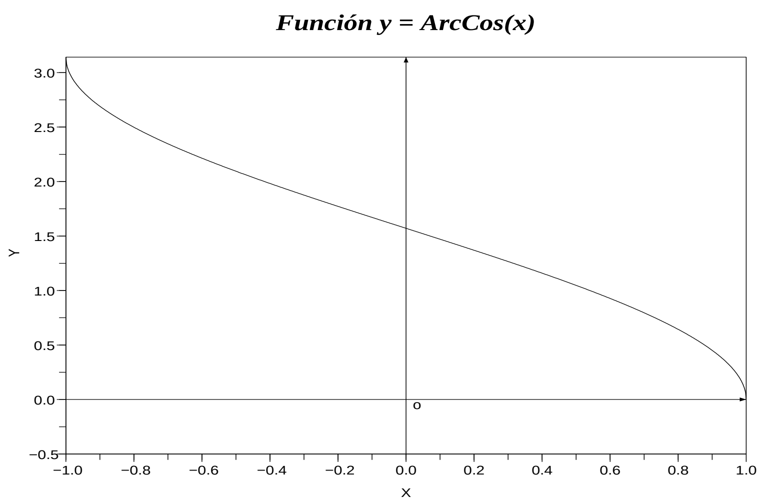

Función y = ArcCos(x)
3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
Y
o
−1.0
−0.8
−0.6
−0.4
−0.2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
X

Fig. 47

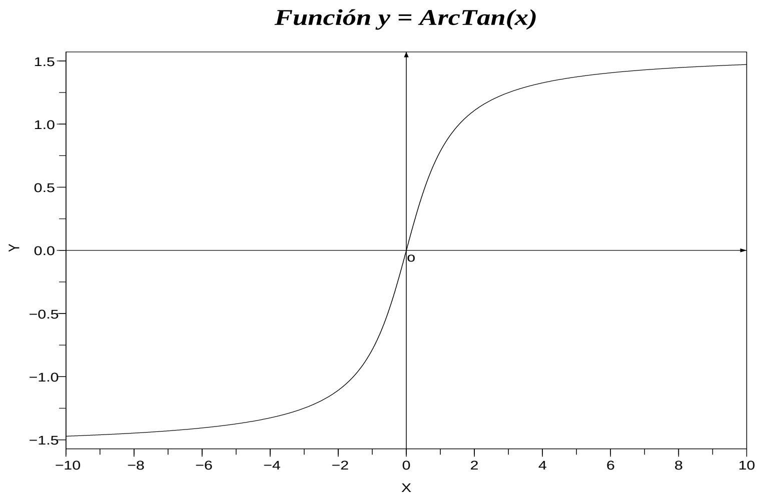


Fig. 48

2.9.1. Identidades Trigonométricas Fundamentales

Resumimos las Identidades trigonométricas fundamentales en las siguientes proposiciones.

Proposición 2.6. *Sea* $X \in \mathrm{Dom}(f)$, *donde la función* f *es* sin, cos, tan, *cotg, sec o cosec. Se tiene que*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cosec} X &= \frac{1}{\sin X}, \\
\sec X &= \frac{1}{\cos X}, \\
\tan X &= \frac{\sin X}{\cos X}, \\
\mathrm{cotg} X &= \frac{1}{\tan X}, \\
\sin^2 X + \cos^2 X &= 1, \\
\tan^2 X + 1 &= \sec^2 X, \\
1 + \mathrm{cotg}^2 X &= \mathrm{cosec}^2 X, \\
\cos X &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - X\right).
\end{aligned}
$$

Proposición 2.7. *Sean* $X, Y \in \mathrm{Dom}(f)$*, donde la función* f *es* sin, cos, tan, *cotg, sec o cosec. Se tiene que*

$$\begin{aligned}
\sin(X+Y) &= \sin X\,\cos Y + \sin Y\,\cos X,\\
\sin(X-Y) &= \sin X\,\cos Y - \sin Y\,\cos X,\\
\cos(X+Y) &= \cos X\,\cos Y - \sin X\,\sin Y,\\
\cos(X-Y) &= \cos X\,\cos Y + \sin X\,\sin Y,\\
\tan(X+Y) &= \frac{\tan X + \tan Y}{1-\tan X\,\tan Y},\\
\tan(X-Y) &= \frac{\tan X - \tan Y}{1+\tan X\,\tan Y},\\
\sin(-X) &= -\sin X,\\
\cos(-X) &= \cos X,\\
\sin(2X) &= 2\sin X\,\cos X,\\
\cos(2X) &= \cos^2 X - \sin^2 X,\\
\tan(2X) &= \frac{2\,\tan X}{1-\tan^2 X}.
\end{aligned}$$

Proposición 2.8. *Sean* $X, Y \in \mathrm{Dom}(f)$*, donde la función* f *es* sin, cos, tan, *cotg, sec o cosec. Se tiene que*

$$\begin{aligned}
2\sin X\,\sin Y &= \cos(X-Y) - \cos(X+Y),\\
2\cos X\,\cos Y &= \cos(X-Y) + \cos(X+Y),\\
2\sin X\,\cos Y &= \sin(X-Y) + \sin(X+Y),\\
\sin X + \sin Y &= 2\,\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\,\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right),\\
\sin X - \sin Y &= 2\,\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)\,\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right),\\
\cos X + \cos Y &= 2\,\cos\left(\frac{X+Y}{2}\right)\,\cos\left(\frac{X-Y}{2}\right),\\
\cos X - \cos Y &= -2\,\sin\left(\frac{X+Y}{2}\right)\,\sin\left(\frac{X-Y}{2}\right).
\end{aligned}$$

Proposición 2.9. *Consideremos un triángulo cualquiera de vértices A, B y C, con lados $a = BC$, $b = AC$ y $c = AB$. Se cumple la* ***Ley de los Senos****,*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \tag{2.15}$$

y también la ***Ley de los Cosenos****,*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \tag{2.16}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B, \tag{2.17}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C. \tag{2.18}$$

Observación 2.13. Para probar la identidad

$$f(x) = g(x), \tag{2.19}$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son expresiones que están dadas en términos de $\sin x$,...,$\sin nx$, $\cos x$,...,$\cos mx$, $\tan x$,...,$\tan lx$, donde $m, n, l \in \mathbb{N}$, se puede reducir tanto $f(x)$ como $g(x)$ a una expresión equivalente pero en términos de una función trigonométrica de ángulo simple ($\sin x$, $\cos x$ o $\tan x$) para entonces usar el hecho que

$$(A = B \quad \wedge \quad B = C) \Rightarrow (A = C).$$

Recuérdese que se puede trabajar tanto en el lado izquierdo como en el derecho de (2.19) pero **no** se deben intercambiar términos o factores de un lado para otro.

2.9.2. Graficación de funciones sinusoidales

Para graficar **funciones sinusoidales**, es decir funciones de la forma

$$h(x) = D + \alpha \sin(ax) + \beta \cos(ax), \tag{2.20}$$

donde $D \in \mathbb{R}$ y $a > 0$, ponemos

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2},$$
$$\Phi = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \tag{2.21}$$

No es difícil comprobar que entonces se tiene que

$$h(x) = D + A \cdot \sin(ax + \Phi), \tag{2.22}$$

que puede ser graficada usando la técnica de traslación-escalamiento presentada en la Sección 2.6.5. Al parámetro $A > 0$ se le conoce como **amplitud**, a $D \in \mathbb{R}$ se le llama **Desplazamiento Vertical**. Al valor

$$O = -\frac{\Phi}{a},$$

se le conoce como **Punto de Referencia**. Además se tiene que

$$\mathrm{per}[h] = \frac{2\pi}{a},$$

así que $a > 0$ es un factor de escalamiento.

Es importante recalcar que $\Phi < 0$ corresponde a un **desfase positivo**, es decir una traslación hacia la derecha, en tanto que $\Phi > 0$ corresponde a un **desfase negativo**, es decir una traslación hacia la izquierda.

Función h(x) = D + A * sen(ax + phi)

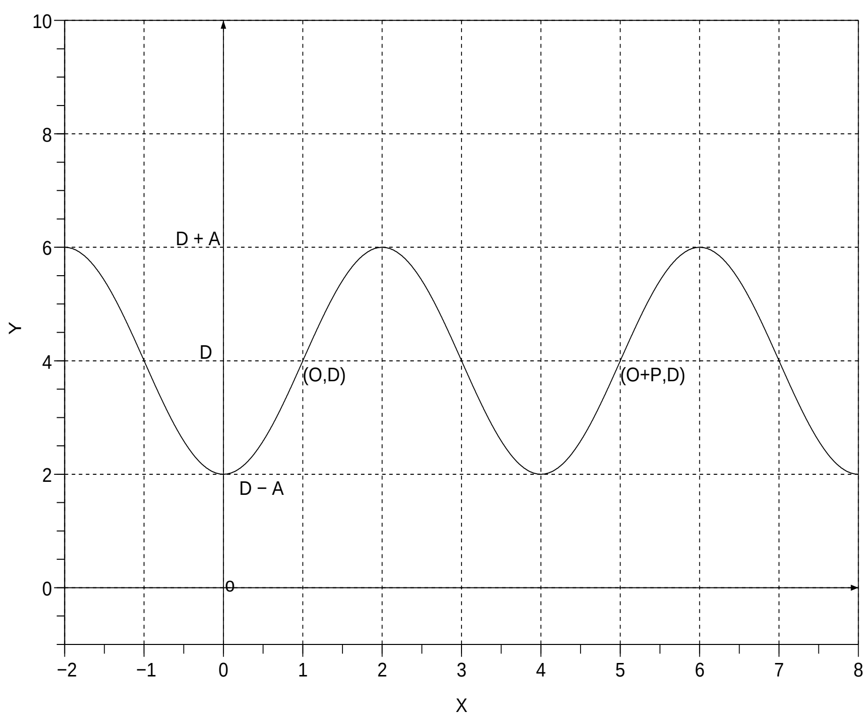


Fig. 49 $a = \pi/2$, $\phi = \pi/2$, $A = 2$, $D = 4$, $\text{per}[h] = 2\pi/a$, $O = -\phi/a$

2.9.3. Resolución de Ecuaciones Trigonométricas

Todas las ecuaciones se pueden reducir a los casos que resumidamente presentamos.

El conjunto solución de la ecuación

$$\sin x = \gamma, \tag{2.23}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$, está dado mediante

$$CS = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } |\gamma| > 1, \\ \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = -1, \\ \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = 0, \\ \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = 1, \\ \{\alpha + 2k\pi \veebar (\pi - \alpha) + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } |\gamma| < 1, \end{cases} \tag{2.24}$$

donde

$$\alpha = \operatorname{arc\,sen}(\gamma).$$

El conjunto solución de la ecuación

$$\cos x = \gamma, \tag{2.25}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$, está dado mediante

$$CS = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } |\gamma| > 1, \\ \{\pi + 2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = -1, \\ \{\frac{\pi}{2} + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = 0, \\ \{2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = 1, \\ \{\pm\alpha + 2k\pi\ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } |\gamma| < 1, \end{cases} \tag{2.26}$$

donde

$$\alpha = \arccos(\gamma).$$

El conjunto solución de la ecuación

$$\tan x = \gamma, \tag{2.27}$$

donde $\gamma \in \mathbb{R}$, está dado mediante

$$CS = \begin{cases} \{-\frac{\pi}{4} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = -1, \\ \{k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = 0, \\ \{\frac{\pi}{4} + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{si } \gamma = 1, \\ \{\alpha + k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\}, & \text{Caso general: } \gamma \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.28}$$

donde

$$\alpha = \arctan(\gamma).$$

2.10. Problemas de Modelización

Como se ha dicho ya, el modelo matemático más simple es la función. Un modelo debe reflejar las características más importantes del fenómeno que se está modelando y debe ser una herramienta que permita tomar decisiones o hallar solución a problemas.

Ejemplo 2.14. Hallar la fórmula de transición de la escala de Celsio (C) a la de Fahrenheit (F), si se conoce que 0^oC corresponde a 32^oF y 100^oC a 212^oF. Construir la gráfica de la función de transición.

Desarrollo.-

Establecemos la variable independiente:

C: Temperatura en grados centígrados.

Establecemos la variable dependiente o función objetivo:

F: Temperatura en grados Fahrenheit.

Con la información que tenemos a mano no podemos establecer la regla de cálculo que vincula C con F. Por tanto, partimos haciendo la suposición más simple, esto es, que hay una relación lineal que liga F y C. Suponemos entonces que existen constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$F = \alpha C + \beta. \tag{2.29}$$

Usamos la información contenida en el enunciado del problema para hallar los valores de α y β:

$$\begin{cases} 32 = 0 + \beta, \\ 212 = 100\alpha + \beta. \end{cases}$$

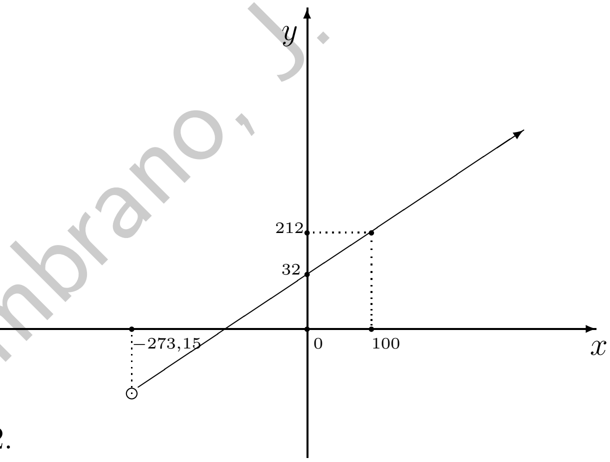
Entonces,

$$\begin{cases} \alpha = 9/5, \\ \beta = 32, \end{cases}$$

así que la regla de cálculo que vincula a F con C es

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32. \tag{2.30}$$

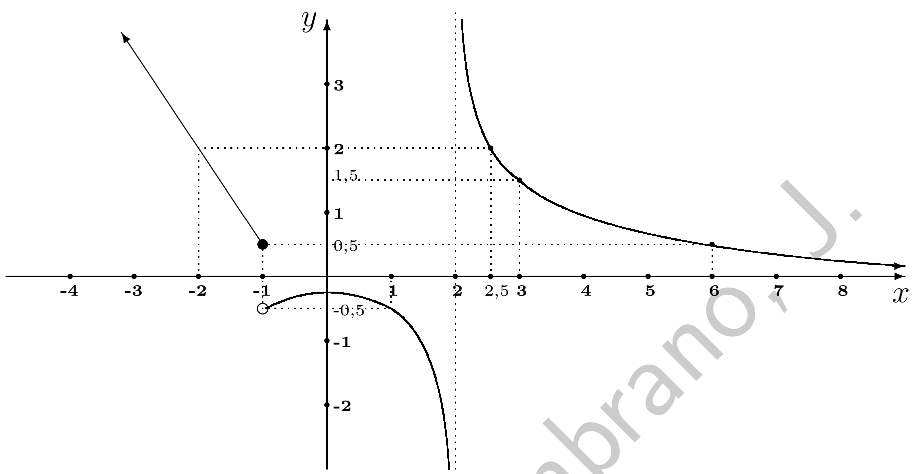
Ahora definiremos apropiadamente una función que trabaje con la regla de cálculo (2.30). entonces estaremos en condiciones de hacer un gráfico. ¿Tiene sentido trabajar en el dominio de definición de $F(C)$? La respuesta es no. Sabemos que la temperatura más baja que un cuerpo puede poseer es el **cero absoluto**: $-273{,}15^oC$. Definimos entonces



$$\begin{aligned} F :]-273{,}15, \infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ C &\longmapsto F(C) = \frac{9}{5}C + 32. \end{aligned}$$

2.11. Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1. A continuación se entrega la gráfica de una función $y = f(x)$:



1. Determinar el valor aproximado de: $f(6)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(f(3))f(0)$
2. ¿En qué punto(s) f no está definida?
3. Determinar el dominio de f
4. Pre-imagen(es) de $-0{,}1$
5. Determinar el recorrido de f
6. Determinar el valor de x_1, x_2, x_3 y x_4 tal que:

$$f(x_1) = 0; \qquad f(x_2) = -2; \qquad f(x_3) = 1/2; \qquad f(x_4) = 2$$

7. Por simple observación de una gráfica es posible resolver inecuaciones. ¿Cuál es el conjunto solución de la inecuación $f(x) \leqslant 0{,}5$?
8. Cuando se consideran valores de x suficientemente grandes, ¿cuál es el comportamiento de f?

Ejercicio 2.2. Hállese el dominio de definición (o máximo dominio) de $y = f(x)$ cuando

1. $y = (x+1)^3$;
2. $y = (x-1)^2$;
3. $y = \frac{1}{4-x^2}$;
4. $y = x + 1$;
5. $y = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$;
6. $y = \sqrt{|x| - |x-1| + 1}$;
7. $y = \sqrt{x+1}$;
8. $y = \sqrt[3]{x+1}$;
9. $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$;
10. $y = x\sqrt{x^2 - 2}$;
11. $y = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$;
12. $y = \ln(x^2 - 1)$.

Ejercicio 2.3. Grafique las siguientes relaciones e indique si es función. Cuando corresponda halle el dominio de definición.

1. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x - y^2 = 0\}$;
2. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x} + y = 0, \ x \geqslant 0\}$;
3. $y = m \cdot x$ si $k = 0, 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2$;
4. $y = x + b$ si $b = 0, 1, 2, -1, -2$;
5. $y = ax^2$, si $a = 1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, 0$;
6. $y = x^2 + c$, si $c = 0, 1, 2, -1$;
7. $y = x^2 - 2x + 3$;

8. $y = -2x^2 + 6x$;
9. $y = x^3 - 3x + 2$;
10. $2x^2 - x^4$;
11. $y = \frac{1}{x}$;
12. $y = \frac{2x-3}{3x+2}$;
13. $y = \frac{10x}{x^2+1}$ (curva de Agnesi);
14. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (tridente de Newton);
15. $y = \sqrt{x^2 - 1}$;
16. $y = x\sqrt{\frac{x}{4-x}}$ (cisoide de Diocles);
17. $y = e^{x^2}$ (curva de probabilidades);
18. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$;
19. $y = |x|$ (valor absoluto);
20. $y = \begin{cases} 3 - x^2, & \text{si } |x| \leqslant 1 \\ a + \frac{2}{|x|}, & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$, si $a = -1, 0, 1$;
21. $y = a^x$, si $a \in (0, 1)$ (compárese con el Ejemplo 2.6);
22. $y = \log_a x$, si $a \in (0, 1)$ (compárese con el Ejemplo 2.7).
23. $y = \ln(x^3 - 1)$.

Ejercicio 2.4. La función

$$\mathbb{R} \ni x \longmapsto \tilde{q}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

da como resultado 1 si su argumento es un racional, y da como resultado 0 si su argumento es un número irracional. Intente graficar la función $\tilde{q}$. ¿Se puede? Explique.

Ejercicio 2.5. Grafique las siguientes funciones y estudie su paridad.

1. $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;
2. $y = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;
3. $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Ejercicio 2.6. Pruebe que cualquier función f, definida sobre $[-l, l]$, $l > 0$, puede representarse como $f = f_p + f_i$ donde f_p es una función par y f_i es una función impar.

Ejercicio 2.7. Pruebe la Proposición 2.1.

Ejercicio 2.8. Dadas las funciones

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = 1 + \frac{x^2}{1+x},$$

halle la función pedida, calcule el dominio de definición y grafique.

1. $f \circ g$;
2. $g \circ h$;
3. $f \circ g + g \circ h$;
4. $\frac{f \circ g \circ h}{h \circ g} - h \circ g$.

Ejercicio 2.9. Sea $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx-a}$, con $a^2 + bc \neq 0$. Calcular y simplificar $(f \circ f)(x)$.

Ejercicio 2.10. Si $f_0(x) = \dfrac{1}{2-x}$ y $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$, encontrar (y demostrar) una fórmula para $f_n(x)$.

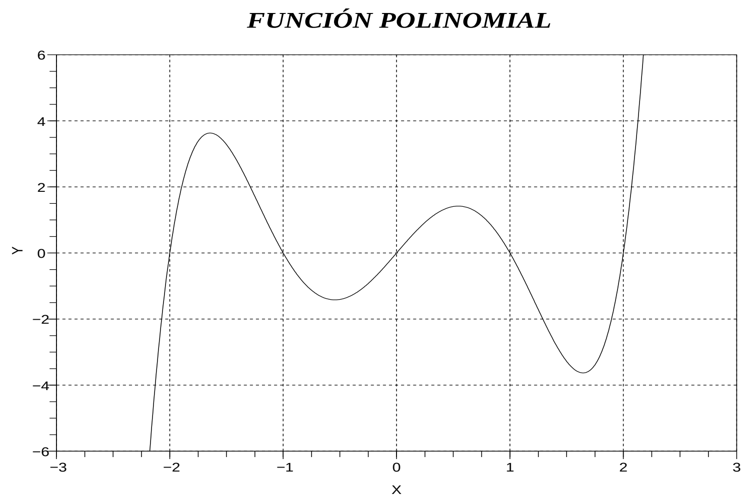
Ejercicio 2.11. Dada la función $y = f(x)$, y los números a, α, b y β, grafique $f(x)$ y $g(x) = \alpha \cdot f(ax - b) + \beta$.

1. $y = \ln(x)$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $b = 1$, $\beta = 1$;
2. $y = \exp(x)$, $a = 2$, $\alpha = 0{,}5$, $b = 1$, $\beta = -1$;
3. $y = 1 - 3x + 2x^2$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $b = 1$, $\beta = 1$;
4. $y = 1 - x + x^2 - x^3$, $a = 1{,}5$, $\alpha = 0{,}5$, $b = -1$, $\beta = -1$;

5. $y = |x|$, $a = 2$, $\alpha = 2$, $b = 0$, $\beta = -3$;

6. $y = \text{dist}(x, -2)$, $a = 1$, $\alpha = 1$, $b = 1$, $\beta = 1$.

Ejercicio 2.12. Un polinomio $y = f(x)$ tiene el siguiente gráfico:



A partir del gráfico de $y = f(x)$ realizar un esbozo de sus siguientes funciones relacionadas:

a) $f_1(x) = f(x+2)$ b) $f_2(x) = f(x-3)$

c) $f_3(x) = f(x) + 2$ d) $f_4(x) = f(x) - 1$

e) $f_5(x) = f(2x)$ f) $f_6(x) = f(x/2)$

g) $f_7(x) = 2f(x)$ h) $f_8(x) = \dfrac{1}{2}f(x)$

i) $f_9(x) = -f(x)$ d) $f_{10}(x) = |f(x)|$

e) $f_{11}(x) = f(|x|)$ f) $f_{12}(x) = 2f(2x-2) - 2$.

Ejercicio 2.13. Utilice la técnica de traslación-escalamiento para hacer un esbozo de los gráficos de las siguientes funciones. Para ello trate de identificar cuál es la función elemental que sirve de modelo.

a) $f_1(x) = x^2 + 2x - 2$

b) $f_2(x) = -x^2 + 4x - 1$

c) $f_3(x) = |x^2 - 4x + 1|$

d) $f_4(x) = |x - 1| + 2$

e) $f_5(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$

f) $f_6(x) = 2 + \sqrt{x-5}$

g) $f_7(x) = -(x+1)^3 + 3$

h) $f_8(x) = |\sqrt{x-1} - 1|$

i) $f_9(x) = ||x-1| - 2|$.

Ejercicio 2.14. Considere las funciones determinadas del Ejercicio 2.2.

1. Indique si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas y grafíquelas.
2. Compare los gráficos de las funciones sobreyectivas con los gráficos de las no-sobreyectivas. ¿En qué se diferencian?
3. Compare los gráficos de las funciones inyectivas con los gráficos de las no-inyectivas. ¿En qué se diferencian?
4. En los casos de funciones no-biyectivos, redefina la función de manera que resulte una función biyectiva y, entonces, halle la fórmula para la función inversa.

Ejercicio 2.15. Dada una función

$$\begin{array}{rcl} f : I \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

denotamos por $\mathcal{Z}(f)$ al **conjunto de ceros** (o **conjunto de raices**) de f, es decir,

$$\mathcal{Z}(f) = \{x \in I : \ f(x) = 0\}.$$

1. Sea $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
   a) Halle $DD(f(x))$.
   b) Halle $\mathcal{Z}(f)$.
   c) Verifique que formalmente se cumple que

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right). \tag{2.31}$$

d) ¿Para qué valores de x, y tiene sentido (2.31)?

2. Las funciones Seno Hiperbólico, denotada sinh, y Coseno Hiperbólico, denotada cosh, se definen mediante

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}),$$

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

   a) Halle $DD(\sinh(x))$ y $DD(\cosh(x))$.
   b) Halle $\mathcal{Z}(\sinh)$ y $\mathcal{Z}(\cosh)$.
   c) Pruebe que

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   d) Pruebe que

$$\operatorname{senh}(x) \cdot \cosh(x) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

3. Sea $f(x) = \ln(\ln x)$.
   a) Halle $DD(f(x))$.
   b) Halle $\mathcal{Z}(f)$.
   c) Resuelva la inecuación

$$f(x - a) > 0,$$

   donde $a \in \mathbb{R}$.
   Solución: $CS =]a + e, \infty[$.

4. Sea $f(x) = \ln(5x - 3) \cdot \ln(2x + 3)$.
   a) Halle $DD(f(x))$.
   b) Halle $\mathcal{Z}(f)$.
   c) Resuelva la inecuación

$$f(x) > 0.$$

   Solución: $CS =]4/5, \infty[$.

Ejercicio 2.16. Determinar si la función f es periódica y, en tal caso, halle su período, per$[f]$.

1. $f(x) = a \cdot \sin(wx)$, donde $a \neq 0$ y $w > 0$;
2. $f(x) = a\ \sin(\lambda x) + b \cos(\lambda x)$, donde $a, b \neq 0$ y $\lambda > 0$;
3. $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$;
4. $f(x) = \sin^2(x)$;
5. $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.

Ejercicio 2.17. Sin utilizar calculadora exprese

1. en radianes: 150º, 315º, 120º, 210º, 75º y 330º;
2. en grados: $3\pi/2$, $\pi/6$, $\pi/3$, $\pi/5$, $2\pi/5$ y $5\pi/2$.

Ejercicio 2.18. El viento troncha un árbol y la punta se apoya en el suelo en un punto situado a 20 metros del tronco formando un ángulo de $\pi/6$ con el plano horizontal. ¿Qué (tamaño de) sombra estaba dando dicho árbol antes de troncharse si la inclinación de los rayos de sol en ese momento era de $\pi/3$? Resuelva sin calculadora.

Ejercicio 2.19. El perímetro de un triángulo equilátero es 18 m. Calcular su área.

Ejercicio 2.20. Pruebe que en un triángulo cualquiera el doble del área se puede calcular como el producto de dos de sus lados multiplicado por el seno del ángulo que forman tales lados.

Ejercicio 2.21. Sabiendo que $\sin X = 4/5$, calcule las demás razones trigonométricas de X sabiendo que X es un ángulo del

1. segundo cuadrante;
2. tercer cuadrante.

Ejercicio 2.22. Desde un punto A en la orilla de un río se ve un árbol justo enfrente. Si caminamos $150m$ río abajo, por la orilla recta del río, llegamos a un punto B desde el que se ve el árbol formando un ángulo de $\pi/12$ con nuestra orilla. Calcular la anchura del río sin usar calculadora.
Indicación. Se sabe que $\sin \pi/6 = 1/2$.

Ejercicio 2.23. Queremos calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles, A y B. Desde dos puntos accesibles C y D tomamos las siguientes medidas $\overline{CD} = 300m$, $\widehat{ADB} = 25^o$, $\widehat{ACB} = 32^o$, $\widehat{ACD} = 46^o$ y $\widehat{BDC} = 40^o$. Calcular la distancia entre A y B.

Ejercicio 2.24. Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden respectivamente R y r con $R > r$. Halle el ángulo que forman sus líneas tangentes comunes.
Respuesta: $2\arcsin\left(\frac{R-r}{R+r}\right)$.
Indicación.- Recuerde que una línea tangente a una circunferencia forma un ángulo recto con el radio que partiendo del centro de la circunferencia llega al punto en común con la línea tangente.

Ejercicio 2.25. Verifique las siguientes identidades trigonométricas

$$\sec\, x - \sin x \tan x = \cos x; \tag{2.32}$$

$$\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x} = \sin^2 x; \tag{2.33}$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x; \tag{2.34}$$

$$\sin 4x = 8\sin x\cos^3 x - 4\sin x\cos x; \tag{2.35}$$

$$\frac{1 - \operatorname{cosec}^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} = \frac{-1}{\sec^2 x}. \tag{2.36}$$

Ejercicio 2.26. Obténgase sin calculadora los valores de

1. $\sin 20^o = \sin \pi/9$;
2. $\cos 5^o = \cos \pi/36$;
3. $\tan 25^o = \tan 5\pi/36$.

Ejercicio 2.27. Grafique las funciones determinadas por las siguientes fórmulas e indique los respectivos dominios de definición

$$y = 2 + 5\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{9}\right); \tag{2.37}$$

$$y = 1 + 4\cos\left(\frac{x}{\pi} + \frac{\pi}{18}\right); \tag{2.38}$$

$$y = 1 + 4\tan\left(3x + \frac{5\pi}{36}\right). \tag{2.39}$$

Ejercicio 2.28. Resuelva las siguiente ecuaciones

$$\sin x + \cos 2x = 1; \tag{2.40}$$

$$\cos^2 x = \cos x; \tag{2.41}$$

$$8 \sin x = 2 + \frac{4}{\operatorname{cosec}\, x}; \tag{2.42}$$

$$3 \tan^2 x = 3\sec^2 x; \tag{2.43}$$

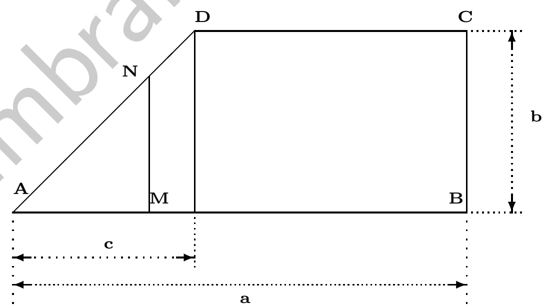
$$\cos 2x + 6 \cos^2 x = 1; \tag{2.44}$$

$$\tan x + \tan 2x = 1; \tag{2.45}$$

$$\tan x + \cos 2x = 1. \tag{2.46}$$

Ejercicio 2.29. Una banda pasa por dos poleas separadas de radios R y r, respectivamente, con $R > r$. ¿Cuántas revoluciones por segundo gira la polea pequeña cuando la polea grande gira a ω revoluciones por segundo?

Ejercicio 2.30. Expresar la longitud del segmento $y = MN$ y el área S de la figura AMN como función de $x = AM$. Construir las gráficas de estas funciones.



Respuesta:

$$y = \begin{cases} \frac{b}{c}x, & \text{si } x \in [0, c], \\ b, & \text{si } x \in (c, a]; \end{cases}$$

$$S = \begin{cases} \frac{b}{2c}x^2, & \text{si } x \in [0, c], \\ bx - \frac{bc}{2}, & \text{si } x \in (c, a]. \end{cases}$$

Ejercicio 2.31. Divida un número $a > 0$ en dos sumandos de tal forma que su producto sea el mayor posible.

CAPÍTULO 3

Límites y Continuidad de funciones reales

Como ya se mencionó, los computadores no trabajan con $\mathbb{R}$, el conjunto de los números reales, y, de hecho, ni siquiera lo hacen con $\mathbb{Q}$, el conjunto de números racionales.

A pesar de que con cada dia que pasa la capacidad de almacenamiento de memoria que tienen los computadores se incrementa y el tamaño físico de los dispositivos se reduce, un computador no es siquiera capaz de manejar un único número irracional. En efecto, si tomamos como ejemplo el número $\pi \approx 3{,}14159...$ resulta que tenemos **infinitas** cifras decimales en tanto que la capacidad de memoria de cualquier computador es **finita** - ¡puede ser muy grande pero no deja de ser finita![1] Cuando se alcanza el tope de la capacidad de memoria del computador, al ir introduciendo más y más cifras decimales del número π, se recibe el mensaje de **underflow**.[2]

Si un computador no puede manejar un número real como π, ¿cómo puede manejar una función real de variable real? La respuesta es que no lo hace: se vale de **truncaciones** y **procesos de aproximación**. Estas dos herramientas tienen que ver directamente con el concepto matemático de

[1] Si no se puede introducir una cosa infinita (como el número π) en algo finito (como la memoria de un computador), ¿sería concecible que el Infinito (o sea Dios) pueda introducirse en un cuerpo finito (como el de un ser humano)?

[2] De manera análoga, si se va introduciendo en el computador números más y más grandes llegará un momento en que se satura la memoria enviando un mensaje de **overflow**.

paso al límite.

En este capítulo aprovechamos el concepto de **sucesión** para presentar de manera intuitiva lo que son los **límites** - primero para sucesiones y luego para funciones reales de variable real - que, a su vez, nos sirven para entender mejor el concepto de **continuidad** de una función real. Las técnicas para el **cálculo de límites** son presentadas justo antes del listado de **ejercicios propuestos**.

3.1. Sucesiones

No es nuestra intensión entrar en demasiados detalles sobre el excitante tema de las sucesiones, pero creemos que es una herramienta importante que debe manejar un Ingeniero pues, finalmente, todas las tareas que realiza un computador son **procesos contables**,[3] es decir, sucesiones y (más exactamente) truncaciones de sucesiones.

Dado $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ denotemos por I_m al conjunto

$$I_m = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n = m,\, m+1,\, m+2, ...\}.$$

Obsérvese que en particular, $I_1 = \mathbb{N}$.

Definición 3.1. *Llamamos sucesión a toda función cuyo dominio es I_m, donde $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Observación 3.1. Como se puede ver, en la definición anterior no se menciona ninguna restricción sobre el codominio de una sucesión. Por tanto, tal codominio podría ser cualquier conjunto no-vacío.

Notación 3.1. Una vez que una sucesión es un tipo especial de función, se acostumbra utilizar una notación que refleje el hecho de que a medida que se va contando se obtienen elementos dentro de un determinado conjunto

[3]Es decir, en un número finito de pasos el computador presenta al usuario una solución exacta o (más bien) aproximada a un determinado problema.

- el correspondiente codominio.[4] En concreto, dados $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y A, un conjunto no-vacío, denotamos a la sucesión

$$\begin{aligned} R : I_m &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto R(n), \end{aligned}$$

como

$$\{R_n\}_{n=m}^{\infty} \subseteq A. \tag{3.1}$$

En particular, cuando $m = 1$, se acostumbra a escribir

$$\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A. \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.1. Por la notación

$$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sqrt{n}\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{R}$$

entendemos la función que tiene como dominio al conjunto $\mathbb{N}$, cuyo codominio es el conjunto $\mathbb{R}$ y la regla de asociación indica que a cada (paso) n hay que calcularle su raíz.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$			
n	$\sqrt{n}$	n	$\sqrt{n}$
1	1.000000...	7	2,645751...
2	1.414213...	8	2.828427...
3	1.732050...	9	3.000000...
4	2.000000...	10	3.162277...
5	2.236067...	11	3.316624...
6	2.449489...	$\vdots$	$\vdots$

Observación 3.2. A partir de este momento trabajaremos exclusivamente con **sucesiones reales**, es decir sucesiones cuyo codominio es $\mathbb{R}$, por lo cual cuando hablemos de una sucesión deberá sobreentenderse automáticamente que se trata de una sucesión real.

3.2. Noción intuitiva de límite

Para presentar la noción de límite revisaremos el comportamiento de algunas sucesiones reales. Luego se nos hará más fácil intuir lo que es un límite de una función real de variable real. Finalmente, en la siguiente sección, definimos de manera estricta lo que es matemáticamente un límite.

[4]Recuérdese que el conjunto de los números nació de la necesidad que tenía el hombre contar.

3.2.1. Límite de una Sucesión

A base de ejemplos pasamos revista a los casos que se pueden presentar. En los Ejemplos 3.2 y 3.3 presentamos sucesiones que tienen **límites finitos**. En particular, el Ejemplo 3.3 trata con lo que más adelante llamaremos indeterminación de tipo 1^∞. En el Ejemplo 3.4 presentamos una sucesión que tiene **límite infinito**. Finalmente en el Ejemplo 3.5 aparece una sucesión para la cual **no existe límite**.

Ejemplo 3.2. Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}. \tag{3.3}$$

n	1	2	4	10	100	1000	1'000000	1×10^{20}	$\cdots$
x_n	2	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.000001	$1 + 1 \times 10^{-20}$	$\cdots$
$\lvert x_n - 1\rvert$	1	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001	0.000001	1×10^{-20}	$\cdots$

Como se puede ver en la tabla, a medida que n tiende a $+\infty$, x_n tiende a 1. En otras palabras, a medida que el argumento n se hace más y más grande, el valor x_n se aproxima más y más a 1. Esto se puede denotar como

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 1.$$

También se puede escribir

$$x_n \longrightarrow 1, \quad \text{cuando } n \longrightarrow +\infty.$$

Finalmente obsérvese que dado cualquier distancia $\epsilon > 0$ - por más que sea muy pequeña - siempre se puede hallar un $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ de manera que la distancia entre x_n y 1 sea menor que ϵ a partir de $n_0 + 1$, es decir,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} :\ (n > n_0) \Rightarrow (\text{dist}(x_n, 1) = |x_n - 1| < \epsilon).$$

Por ejemplo, obsérvese que para $\epsilon_1 = 0{,}5$, se puede tomar $n_0(\epsilon_1) = 2$. Para $\epsilon_2 = 0{,}001$, funciona $n_0(\epsilon_2) = 1000$.

Ejemplo 3.3. Consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{3.4}$$

Como se puede ver en la tabla, a medida que n tiende a $+\infty$, y_n tiende a la base del sistema de logaritmos neperianos $e = 2{,}7182818285....$ En otras palabras, a medida que el argumento n se hace más y más grande, el valor y_n se aproxima más y más a e. Esto se denota como

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = e.$$

También se puede escribir

$$y_n \longrightarrow e, \quad \text{cuando } n \longrightarrow +\infty.$$

n	y_n aprox.	$\lvert y_n - e\rvert$ aprox.
1	2.000000000	0.7182818285
2	2.250000000	0.4682818285
3	2.370370370	0.3479114581
4	2.441406250	0.2768755785
5	2.488320000	0.2299618285
6	2.521626372	0.1966554567
7	2.546499697	0.1717821314
8	2.565784514	0.1524973145
9	2.581174792	0.1371070367
10	2.593742460	0.1245393684
50	2.691588029	0.02669379939
100	2.704813829	0.01346799904
1000	2.716923932	0.001357896223
1000000	2.718280469	$1{,}35913966 \times 10^{-6}$
1×10^{12}	2.718281828	$1{,}35 \times 10^{-12}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Finalmente obsérvese que dado cualquier distancia $\epsilon > 0$ - por más que sea muy pequeña - siempre se puede hallar un $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ de manera que la distancia entre y_n y e sea menor que ϵ a partir de $n_0 + 1$, es decir,

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} :\ (n > n_0) \Rightarrow (\mathrm{dist}(y_n, e) = |y_n - e| < \epsilon).$$

Por ejemplo, obsérvese que para $\epsilon_1 = 0{,}5$, se puede tomar $n_0(\epsilon_1) = 2$. Para $\epsilon_2 = 0{,}15$, funciona $n_0(\epsilon_2) = 8$ y para $\epsilon_3 = 0{,}015$, podemos tomar $n_0(\epsilon_3) = 100$.

Ejemplo 3.4. Consideremos la sucesión $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$w_n = n^2 - 5.$$

n	1	2	4	10	100	1000	1×10^{20}	$\cdots$
w_n	-4	-1	11	95	9995	999995	1×10^{40}	$\cdots$
$\lvert w_n\rvert$	4	1	11	95	9995	999995	1×10^{40}	$\cdots$

Como se puede ver en la tabla, a medida que n tiende a $+\infty$, w_n también tiende a $+\infty$. En otras palabras, a medida que el argumento n se hace más y más grande, el valor w_n también se hace más y más grande. Esto se denota como

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} w_n = +\infty.$$

También se puede escribir

$$w_n \longrightarrow 1, \quad \text{cuando } n \longrightarrow +\infty.$$

Finalmente obsérvese que dado cualquier tamaño $M > 0$ - por más que sea muy grande - siempre se puede hallar un $n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N}$ de manera que w_n sea màs grande que M a partir de $n_0 + 1$, es decir,

$$\forall M > 0,\ \exists n_0 = n_0(M) \in \mathbb{N} :\ (n > n_0) \Rightarrow (w_n > M).$$

Por ejemplo, obsérvese que para $M_1 = 10$, se puede tomar $n_0(M_1) = 4$. Para $M_2 = 9000$, funciona $n_0(M_2) = 100$.

Ejemplo 3.5. Consideremos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$x_n = (-1)^n \cdot \pi. \tag{3.5}$$

La tabla correspondiente es

n	1	2	3	4	$\cdots$	$2k$	$2k+1$	$\cdots$
x_n	$-\pi$	π	$-\pi$	π	$\cdots$	π	$-\pi$	$\cdots$

donde k denota cualquier número natural. Como se puede ver no hay un valor L al que converja x_n a medida que crece n. Decimos por tanto que **no existe límite de x_n cuando n tiende a $+\infty$.**

3.2.2. Límite de una función

A partir de ejemplos pasamos revista a los casos que se pueden presentar. Los Ejemplos 3.6 y 3.7 son limites finitos. Los Ejemplos 3.8 y 3.9 son limites infinitos. Finalmente en los Ejemplos 3.10, 3.11 y 3.12 la función respectiva no tiene límite donde se analiza.

Ejemplo 3.6. Consideremos la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = 1 + x.$$

Queremos analizar el comportamiento de $f(x)$ cuando x se acerca a $x_\infty = 0$, es decir, queremos ver si de alguna manera tiene sentido escribir

$$\lim_{x\longrightarrow x_\infty} f(x) = L, \tag{3.6}$$

para algún número real L. ¿Será posible hacer un análisis como el que hicimos sobre la sucesión del Ejemplo 3.2?

Para empezar, si reemplazamos la variable independiente x por el **camino**

$$(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},$$

tenemos que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \hat{x}_n = x_\infty = 0$$

y se puede observar el siguiente **comportamiento de $f(x)$ cuando x se acerca a $x_\infty = 0$ siguiendo el camino $\hat{x}_n$**:

n	1	2	4	10	100	1000	1’00000	1×10^{20}	$\cdots$
$x = \hat{x}_n$	1	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001	0.000001	1×10^{-20}	$\cdots$
$f(x)$	2	1.5	1.25	1.1	1.01	1.001	1.000001	$1+1\times10^{-20}$	$\cdots$
$\lvert f(x)-1\rvert$	1	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001	0.000001	1×10^{-20}	$\cdots$

Al ver esta tabla nos sentimos tentados a afirmar la veracidad de la fórmula (3.6) con $L = 1$. Sin embargo, esto es prematuro pues, en tanto que $\tilde{x}_n$ es **un** camino que tiende a $x_\infty = 0$, lo que buscamos es el **comportamiento de $f(x)$ cuando x se acerca a $x_\infty = 0$ siguiendo cualquier camino**.

Indaguemos entonces un poco más. Analicemos el **comportamiento de $f(x)$ cuando x se acerca a $x_\infty = 0$ siguiendo el camino**

$$(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sin(1/n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},$$

que claramente cumple

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \tilde{x}_n = x_\infty = 0.$$

Aquí se tiene:

n	1	2	4	10	100	1'00000	1×10^{20}	$\cdots$
$x=\tilde{x}_n$	1	0.5	0.25	0.1	0.01	0.000001	1×10^{-20}	$\cdots$
$f(x)$	1.8415	1.4794	1.2474	1.0998	1.001	1.000001	$1+1\times10^{-20}$	$\cdots$
$\lvert f(x)-1\rvert$	0.8415	0.4794	0.2474	0.0998	0.001	0.000001	1×10^{-20}	$\cdots$

Viendo esta tabla reforzamos nuestra intuición de que (3.6) es válido, es decir conforme a la información que tenemos parece ser que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1,$$

¡pero sigue sin ser suficiente! Recordemos que lo que necesitamos es que a través de **todo** camino $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que a $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_0 = 0$ se cumpla que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = L = 1.$$

Vamos más allá y veamos si el gráfico de la función g refuerza esta intuición:

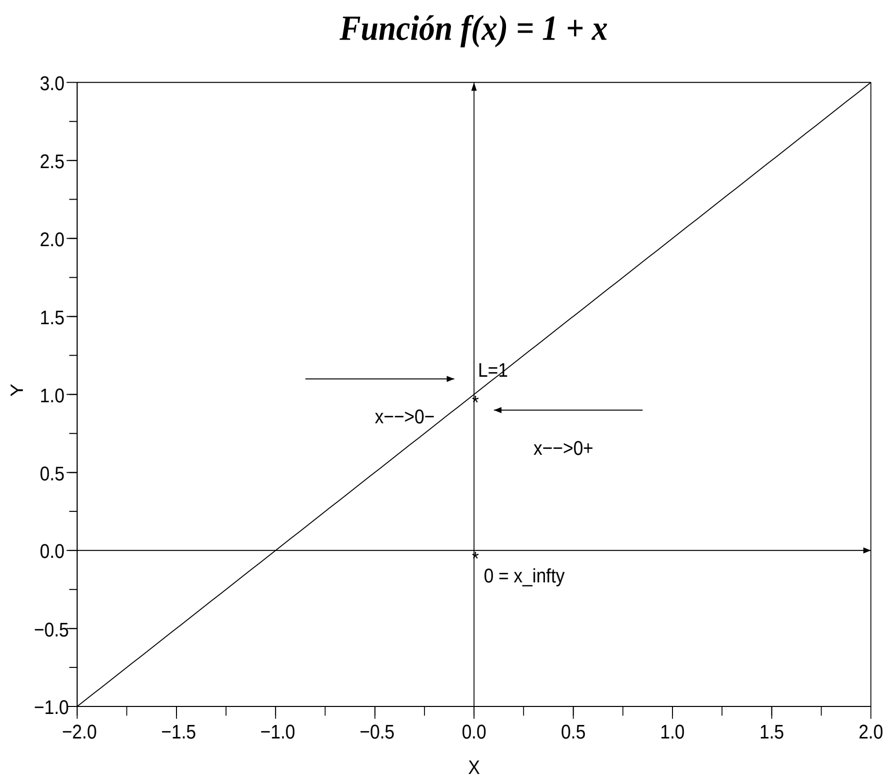


Fig. 50 Ejemplo de límite finito de una función real.

En el gráfico observamos que cuando x se va acercando a $x_\infty = 0$ desde la izquierda el valor de $f(x)$ se acerca a $L = 1$, esto se denota mediante

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = 1.$$

Asimismo cuando x se va acercando a $x_\infty = 0$ desde la derecha el valor de $f(x)$ se acerca a $L = 1$, esto se denota mediante

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1.$$

Para estas instancias nuestra confianza en la validez de (3.6) es alta pero, sin embargo, no hemos probado tal validez - para ello se necesita definir matemáticamente qué es un límite lo cual será abordado en la siguiente sección.

Ejemplo 3.7. Aprovechemos los caminos $(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ y $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ usados en el Ejemplo 3.6 para estudiar el comportamiento de la función definida por la fórmula

$$g(x) = (1 + x)^{1/x}, \tag{3.7}$$

cuando x tiende a $x_\infty = 0$. Para empezar, obsérvese que

$$\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

es decir, no es necesario que la función g esté definida en $x_\infty = 0$, pero necesitamos que sí lo esté en torno a x_∞. Llamamos la atención sobre la similitud de la fórmula (3.7) con la fórmula (3.4) del Ejemplo 3.3. Sospechamos entonces que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = e \approx 2{,}718281828 \tag{3.8}$$

Para el camino

$$(\hat{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$$

la tabla de valores es

n	$x = \hat{x}_n$ aprox.	$f(x)$ aprox.	$\|f(x) - e\|$ aprox.
1	1.0000000	2.000000000	0.7182818285
2	0.5000000	2.250000000	0.4682818285
3	0.3333333	2.370370370	0.3479114581
4	0.2500000	2.441406250	0.2768755785
5	0.2000000	2.488320000	0.2299618285
10	0.1000000	2.593742460	0.1245393684
50	0.0200000	2.691588029	0.0266937994
100	0.0100000	2.704813829	0.0134679990
1000	0.0010000	2.716923932	0.0013578962
1000000	0.0000010	2.718280469	$1{,}35913966 \times 10^{-6}$
1×10^{12}	1×10^{-12}	2.718281828	$1{,}35 \times 10^{-12}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para el camino

$$(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sin(1/n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R},$$

la tabla de valores es

n	$x = \tilde{x}_n$ aprox.	$f(x)$ aprox.	$\|f(x) - e\|$ aprox.
1	0.8414710	2.0659540	0.6523278
2	0.4794255	2.2635248	0.4547570
3	0.3271947	2.3753259	0.3429560
4	0.2474040	2.4437576	0.2745242
5	0.1986693	2.4896172	0.2286646
10	0.0998334	2.5939326	0.1243492
50	0.0199987	2.6915898	0.0266921
100	0.0099998	2.7048141	0.0134678
1000	0.0010000	2.7169239	0.0013579
1000000	0.0000010	2.7182805	0,0000014
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A partir de las dos tablas anteriores nos sentimos más confiados a aseverar la validez de (3.8); sin embargo, vamos más allá y veamos si el gráfico de la función g refuerza esta intuición.

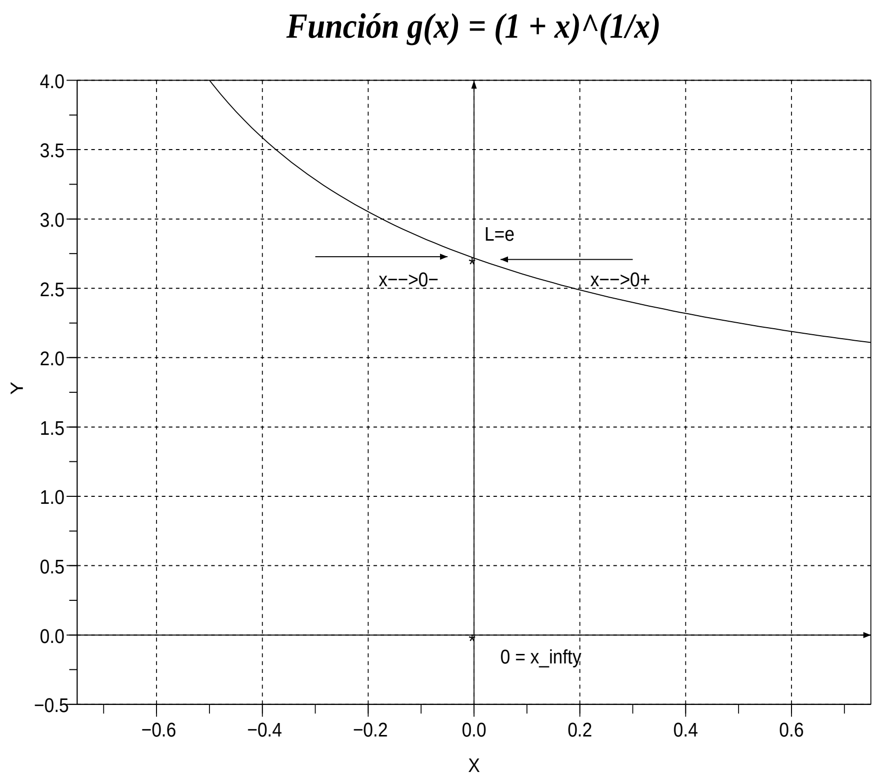


Fig. 51 Ejemplo de límite finito de una función real.

En el gráfico observamos que cuando x se va acercando a $x_\infty = 0$ desde la izquierda el valor de $f(x)$ se acerca a $L = e \approx 2{,}718281828$, esto se denota mediante

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \uparrow 0} f(x) = e.$$

Asimismo cuando x se va acercando a $x_\infty = 0$ desde la derecha el valor de $f(x)$ se acerca a $L = e \approx 2{,}718281828$, esto se denota mediante

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = e.$$

Recalquemos que no hemos probado la validez de (3.8) pero que sí estamos en condiciones de pronosticar tal validez.

Ejemplo 3.8. Consideremos la función $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$h(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2.$$

Tanteemos con algunos valores para obtener alguna información sobre como se comporta $h(x)$ a medida que x crece a $+\infty$.

x	1	3	4	10	100	1000	$\cdots$
$h(x)$	0	8	30	792	979902	$9{,}98 \times 10^8$	$\cdots$
$\lvert h(x)\rvert$	0	8	30	792	979902	$9{,}98 \times 10^8$	$\cdots$

Como se puede ver en la tabla, a medida que x tiende a $+\infty$, $h(x)$ también tiende a $+\infty$. En otras palabras, a medida que el argumento x se hace más y más grande, el valor $h(x)$ también se hace más y más grande. Esto se denota como

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} h(x) = +\infty.$$

También se puede escribir

$$h(x) \longrightarrow +\infty, \quad \text{cuando } x \longrightarrow +\infty.$$

Finalmente obsérvese que dado cualquier tamaño $M > 0$ - por más que sea muy grande - siempre se puede hallar un $x_0 = x_0(M) \in \mathbb{R}$ de manera que $h(x)$ sea más grande que M a partir de x_0, es decir,

$$\forall M > 0, \ \exists x_0 = x_0(M) \in \mathbb{R} : \ (x \geqslant x_0) \Rightarrow (h(x) > M).$$

Por ejemplo, obsérvese que para $M_1 = 10$, se puede tomar $x_0(M_1) = 4$. Para $M_2 = 9000$, funciona $x_0(M_2) = 100$.

Ahora veamos como se comporta $h(x)$ a medida que x decrece a $-\infty$.

$\cdots$	-1000	-100	-10	-4	-2	-1	x
$\cdots$	$-1{,}002 \times 10^9$	-1019898	-1188	-90	-12	0	$h(x)$
$\cdots$	$1{,}002 \times 10^9$	1019898	1188	90	12	0	$\lvert h(x)\rvert$

Como se puede ver en la tabla, a medida que x tiende a $-\infty$, $h(x)$ tiende a $-\infty$. En otras palabras, a medida que el argumento x se hace más y más grande, el valor $h(x)$ se hace más y más chico. Esto se denota como

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

También se puede escribir

$$h(x) \longrightarrow -\infty, \quad \text{cuando } x \longrightarrow -\infty.$$

Finalmente obsérvese que dado cualquier tamaño $M > 0$ - por más que sea muy grande - siempre se puede hallar un $x_0 = x_0(M) \in \mathbb{R}$ de manera que $h(x)$ sea más chico que $-M$ a partir de x_0, es decir,

$$\forall M > 0, \ \exists x_0 = x_0(M) \in \mathbb{R} : \ (x \leqslant x_0) \Rightarrow (h(x) < -M).$$

Por ejemplo, obsérvese que para $M_1 = 10$, se puede tomar $x_0(M_1) = -2$. Para $M_2 = 9000$, funciona $x_0(M_2) = -100$.

Con la información que hasta ahora tenemos hemos deducido que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} h(x) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} h(x) = -\infty.$$

Pero, como en los ejemplos anteriores, recalquemos que no hemos probado la validez de estos límites - ¡ni siquiera hemos definido qué es estrictamente un límite! De hecho, aún con la información provista por el gráfico (que a continuación presentamos) no contamos con una demostración de tal validez; lo que sí, nuestra convicción aumenta...

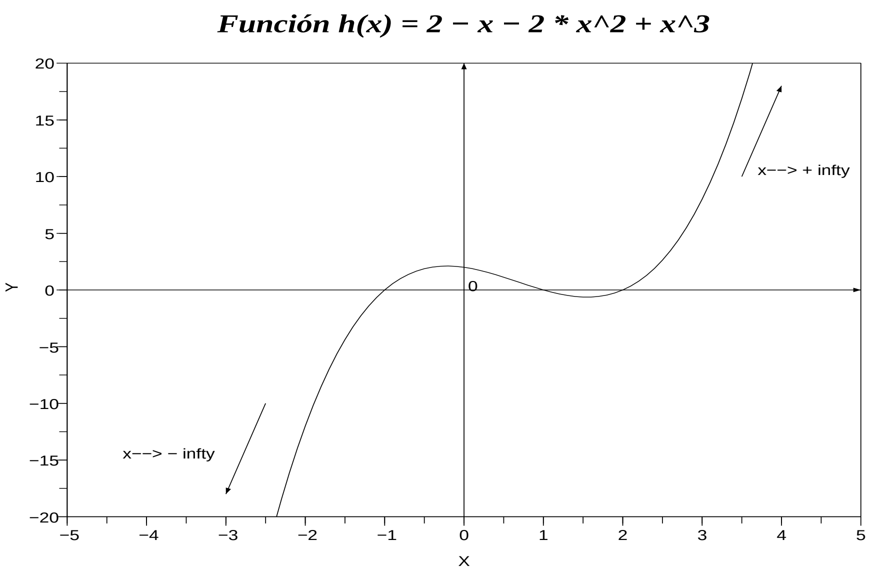


Fig. 52 Ejemplo de límite infinito de una función real.

Ejemplo 3.9. Consideremos la función $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$\gamma(x) = \frac{1}{|x-1|}.$$

Nos interesa saber como comporta $\gamma(x)$ a medida que x se acerca a $x_0 = 1$. Para empezar observemos que $\mathrm{Dom}(\gamma) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nuevamente, no importa que la función no esté definida en x_0, el punto donde buscamos límite, pero necesitamos que tal función sí esté definida en torno a x_0.

x	$\gamma(x)$
0.9000000000	10
0.9900000000	100
0.9990000000	1000
0.9999000000	10000
0.9999999999	1×10^{10}
$\vdots$	$\vdots$
1.0000000000	no definido
$\vdots$	$\vdots$
1.0000000001	1×10^{10}
1.0001000000	10000
1.0010000000	1000
1.0100000000	100
1.1000000000	10

Como se puede ver en la tabla, a medida que x tiende a $x_0 = 1$ desde la izquierda, $\gamma(x)$ crece hacia $+\infty$, es decir,

$$\lim_{x\uparrow 1} \gamma(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^-} \gamma(x) = +\infty.$$

Asimismo, a medida que x tiende a $x_0 = 1$ desde la derecha, $\gamma(x)$ crece hacia $+\infty$, es decir,

$$\lim_{x\downarrow 1} \gamma(x) = \lim_{x\longrightarrow 1^+} \gamma(x) = +\infty.$$

Si a esta información numérica le sumamos el gráfico de la función γ sentimos (¡pero no probamos!) que

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \gamma(x) = +\infty.$$

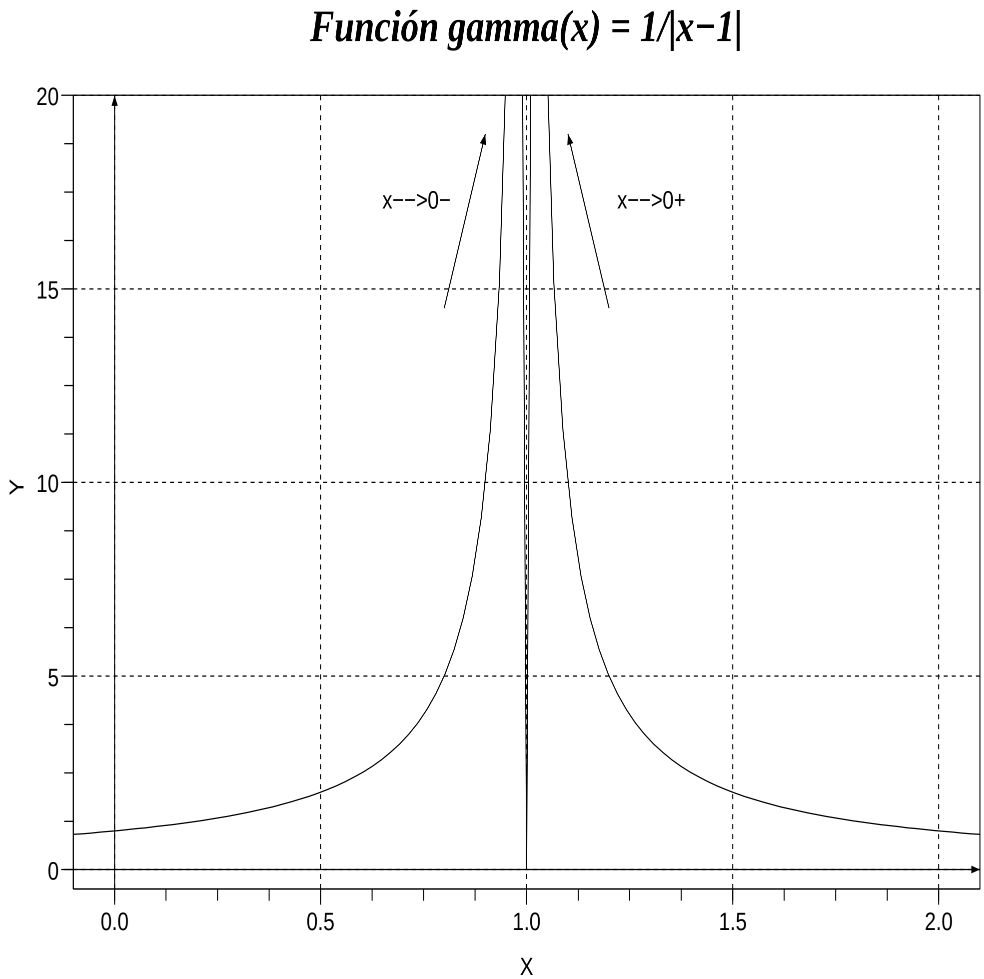


Fig. 53 Ejemplo de límite infinito de una función real.

Ejemplo 3.10. Si f es una función periódica que no es constante, entonces no existe

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x)$$

ni tampoco

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x).$$

A este caso pertenecen las funciones trigonométricas.

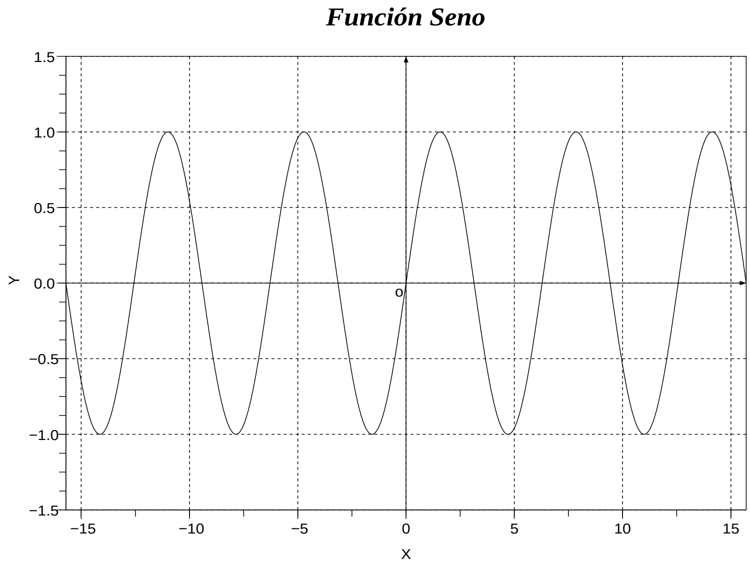


Fig. 54

Ejemplo 3.11. A partir del gráfico de las función signo es claro que no existe el límite cuando x tiende a 0.

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

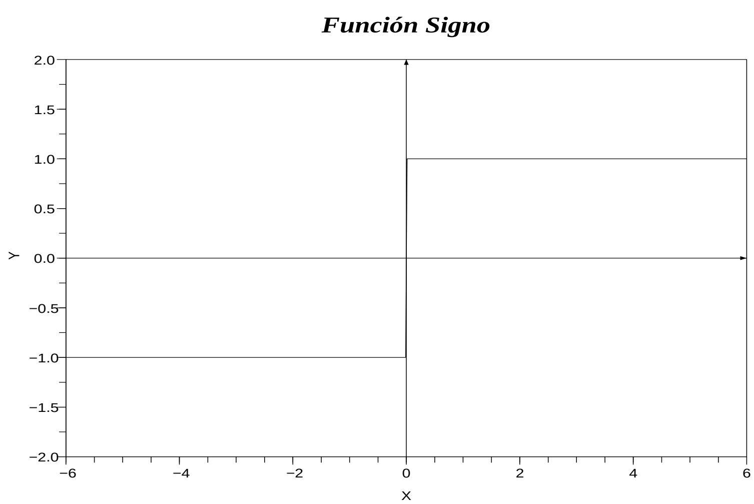


Fig. 55

Ejemplo 3.12. A partir del gráfico de las función tangente es claro que no existe el límite cuando x tiende a $\frac{\pi}{2} + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

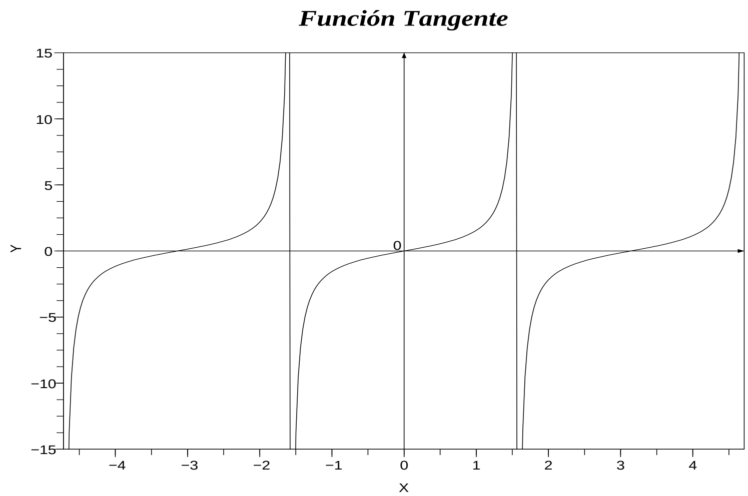


Fig. 56

3.3. Definiciones de límites

En la Sección 3.2 introducimos intuitivamente varios límites. Mencionamos también que no siempre existe el límite buscado. Todo fue intuitivo y apelando al sentido común. Pero, como también fue mencionado, nunca se probó la existencia o no-existencia de tales límites pues, para ello, se necesitan definiciones precisas sobre lo que se está buscando - ese es el tema de esta sección.

Observación 3.3. De la definición de continuidad de una función (Def. 3.10) se hará evidente que necesitamos conocer cómo calcular límites para establecer la continuidad de una función. Por esta razón una variedad de técnicas para el cálculo de límites se presentan recién en la Sección 3.9. De esta manera buscamos que el estudiante optimice su tiempo dedicado a ejercicios (véase Sección 3.11).

Definición 3.2. **Límite finito de una sucesión.** *Se dice que una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *converge a* $x \in \mathbb{R}$ *si se cumple que*

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N = N(\epsilon) \in \mathbb{N} :\ (n > N) \Rightarrow (|x_n - x| < \epsilon). \tag{3.9}$$

Observación 3.4. En palabras, (3.9) dice que dada $\epsilon > 0$ cualquier distancia a x, todos los elementos de la sucesión, salvo un número finito, distan menos que ϵ de x. Revise los Ejemplos 3.2 y 3.3.

Definición 3.3. **Límite infinito de una sucesión.** *Se dice que una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *diverge a* ∞ *si se cumple que*

$$\forall M > 0,\ \exists N = N(M) \in \mathbb{N} :\ (n > N) \Rightarrow (x_n > M). \tag{3.10}$$

Se dice $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ ***diverge a*** $-\infty$ *si se cumple que*

$$\forall M > 0,\ \exists N = N(M) \in \mathbb{N} :\ (n > N) \Rightarrow (x_n < -M). \tag{3.11}$$

Observación 3.5. En palabras, (3.10) dice que dado $M > 0$ cualquier tamaño (por más grande que sea), todos los elementos de la sucesión, salvo un número finito, son más grandes que M. Revise el Ejemplo 3.4.

Observación 3.6. En palabras, (3.11) dice que dado $M > 0$ cualquier tamaño (por más grande que sea), todos los elementos de la sucesión, salvo un número finito, son más chicos (o están más a la izquierda en el eje real) que $-M$.

Definición 3.4. Límite finito de una función real. *Sea* $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que*

$$I \setminus \{x_\infty\} \subseteq \mathrm{Dom}(f),$$

donde $x_\infty \in I = [a, b]$, *con* $a < b$. *Se dice que* $L \in \mathbb{R}$ *es el límite de la función* f *cuando* x *tiende a* x_∞ *si para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I \setminus \{x_\infty\}$ *tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_\infty,$$

se cumple que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = L. \tag{3.12}$$

En este caso escribimos

$$\lim_{x\longrightarrow x_\infty} f(x) = L. \tag{3.13}$$

Definición 3.5. Límite infinito de una función real. *Sea* $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que*

$$I \setminus \{x_\infty\} \subseteq \mathrm{Dom}(f),$$

donde $x_\infty \in I = [a, b]$, *con* $a < b$. *Se dice que* $f(x)$ *tiende a* $L \in \{+\infty, -\infty\}$ *cuando* x *tiende a* x_∞ *si para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I \setminus \{x_\infty\}$ *tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_\infty,$$

se cumple que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = L. \tag{3.14}$$

En este caso escribimos

$$\lim_{x\longrightarrow x_\infty} f(x) = L. \tag{3.15}$$

Observación 3.7. En las dos definiciones anteriores se nos dice que necesitamos que a través de **todo** camino $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_\infty$ se cumpla que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = L$$

para concluir que

$$\lim_{x\longrightarrow x_\infty} f(x) = L,$$

donde $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Véanse los Ejemplos 3.6, 3.7 y 3.9.

Finalmente establezcamos qué es exactamente un límite lateral.

Definición 3.6. **Límite lateral por la izquierda de una función real.** *Sea* $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que*

$$I \setminus \{x_\infty\} \subseteq \mathrm{Dom}(f),$$

donde $x_\infty \in I = [a, b]$, *con* $a < b$. *Se dice que* $L \in \mathbb{R}$ *es el límite de la función* f *cuando* x *tiende a* x_∞ *por la izquierda si para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I \setminus \{x_\infty\}$ *tal que*

$$x_n \leqslant x_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_\infty,$$

se cumple que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = L. \tag{3.16}$$

En este caso escribimos

$$\lim_{x\longrightarrow x_\infty^-} f(x) = \lim_{x\uparrow x_\infty} f(x) = L. \tag{3.17}$$

Definición 3.7. Límite lateral por la derecha de una función real. *Sea* $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función tal que*

$$I \setminus \{x_\infty\} \subseteq \mathrm{Dom}(f),$$

donde $x_\infty \in I = [a, b]$, *con* $a < b$. *Se dice que* $L \in \mathbb{R}$ *es el límite de la función* f *cuando* x *tiende a* x_∞ *por la derecha si para cada sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset I \setminus \{x_\infty\}$ *tal que*

$$x_n \geqslant x_\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_\infty,$$

se cumple que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = L. \tag{3.18}$$

En este caso escribimos

$$\lim_{x\longrightarrow x_\infty^+} f(x) = \lim_{x\downarrow x_\infty} f(x) = L. \tag{3.19}$$

Para el estudiante interesado en **qué es realmente probar un límite** le recomendamos leer [8, Sección 1.8].

Presentamos ahora la definición de límite al infinito de una función real. Véase el Ejemplo 3.8.

Definición 3.8. Límite al infinito de una función real *Sea* f *una función real tal que* $\mathrm{Dom}(f)$ *no está acotado superiormente. Decimos que* $f(x)$ *diverge a* $L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ *cuando* x *tiende a* $+\infty$, *lo cual se denota*

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) = L,$$

si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Dom}(f)$ *tal que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = +\infty,$$

se cumple que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f(x_n) = L.$$

Definición 3.9. **Límite al infinito de una función real** *Sea f una función real tal que* $\mathrm{Dom}(f)$ *no está acotado inferiormente. Decimos que $f(x)$ diverge a $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ cuando x tiende a $-\infty$, lo cual se denota*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = L,$$

si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Dom}(f)$ *tal que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n = -\infty,$$

se cumple que

$$\lim_{n \longrightarrow -\infty} f(x_n) = L.$$

3.4. Teoremas y Proposiciones sobre límites

Para empezar veamos de qué manera los conceptos de límite finito y límite lateral se vinculan.

Proposición 3.1. *Sea f una función real tal que $I \setminus \{x_0\} \subseteq$* $\mathrm{Dom}(f)$*, donde $I = (a, b)$ y $x_0 \in I$. Si $L \in \mathbb{R} \cap \{+\infty, -\infty\}$, se tiene que*

$$\left(\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = L \wedge \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = L \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \right). \tag{3.20}$$

Cuando un límite existe, es único; ese es el contenido de la siguiente

Proposición 3.2. *Sea f una función real tal que $I \setminus \{x_0\} \subseteq$* $\mathrm{Dom}(f)$*, donde $I = (a, b)$ y $x_0 \in I$. Supongamos que $L_1, L_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Si*

$$L_1 = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \quad \wedge \quad L_2 = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x),$$

entonces

$$L_1 = L_2.$$

Observación 3.8. Obsérvese que la proposición anterior considera tanto el caso de un límite finito como el de un limite infinito.

En la siguiente proposición establecemos como se puede operar con los límites finitos.

Proposición 3.3. *Sean f y g dos funciones reales tales que $I \setminus \{x_0\} \subseteq \mathrm{Dom}(f) \cap \mathrm{Dom}(g)$, donde $I = (a, b)$ y $x_0 \in I$. Supongamos que*

$$L_1 = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad L_2 = \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) \in \mathbb{R},$$

entonces

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (f \pm g)(x) = L_1 \pm L_2 = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) \quad (3.21)$$

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2 = \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x). \quad (3.22)$$

Además, si $L_2 \neq 0$,

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L_1}{L_2} = \frac{\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x)}. \quad (3.23)$$

El siguiente teorema es equivalente a la Definición 3.4.

Teorema 3.1. *Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que*

$$I \setminus \{x_\infty\} \subseteq \mathrm{Dom}(f),$$

donde $x_\infty \in I = [a, b]$, con $a < b$. Entonces $L = \lim_{x \longrightarrow x_\infty} f(x) \in \mathbb{R}$, si y sólo si se cumple que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) : \ (|x - x_\infty| < \delta) \Longrightarrow (|f(x) - L| < \epsilon). \quad (3.24)$$

El siguiente teorema es equivalente a la Definición 3.5.

Teorema 3.2. *Sea $f : \mathrm{Dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función tal que*

$$I \setminus \{x_\infty\} \subseteq \mathrm{Dom}(f),$$

donde $x_\infty \in I = [a,b]$, con $a < b$. Entonces $\lim_{x \longrightarrow x_\infty} f(x) = +\infty$,, si y sólo si se cumple que

$$\forall M > 0,\, \exists \delta = \delta(M) : \ (|x - x_\infty| < \delta) \Longrightarrow (f(x) > M)\,. \quad (3.25)$$

Asimismo $\lim_{x \longrightarrow x_\infty} f(x) = +\infty$,, si y sólo si se cumple que

$$\forall M > 0,\, \exists \delta = \delta(M) : \ (|x - x_\infty| < \delta) \Longrightarrow (f(x) < -M)\,. \quad (3.26)$$

3.5. Continuidad

Cuando hablamos de **continuidad de una función en un punto** nos referimos intuitivamente al hecho de que *el gráfico de la función se puede trazar de manera continua o de un solo trazo - sin levantar el lápiz - cuando nos movemos en las cercanías de tal punto.* Viéndolo así es claro que, en tanto que la función seno es continua en el punto $x = 0$, la función signo no lo es.

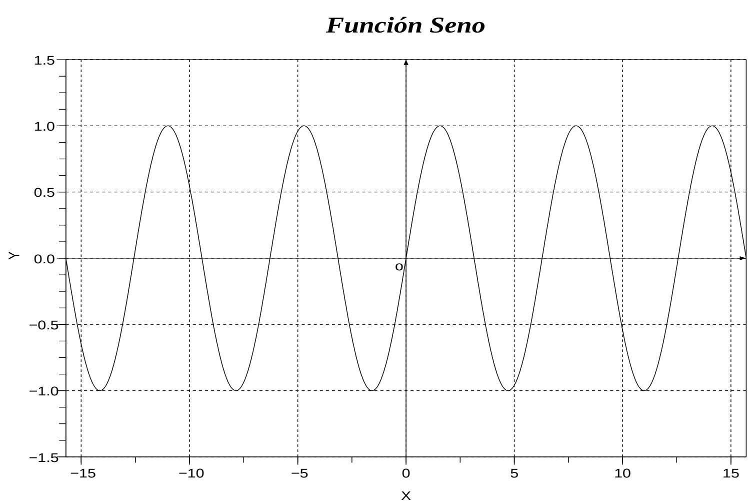


Fig. 57

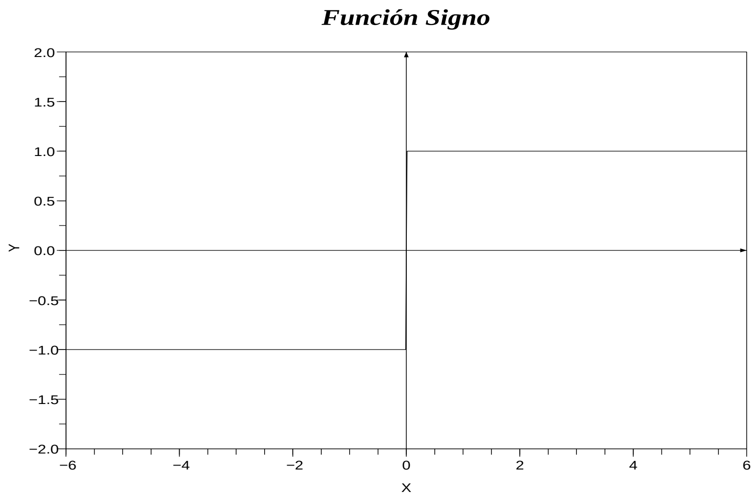


Fig. 58

De hecho tenemos la

Definición 3.10. **Continuidad.** *Una función $f : \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, es* ***continua en el punto*** *$x_0 \in \mathbb{R}$ si se cumple que*

1. $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$;
2. $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$;

caso contrario decimos que f es ***discontinua en el punto*** *x_0. Decimos que f es* ***continua en la región*** *A si es continua en* *todo punto $x \in A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.*

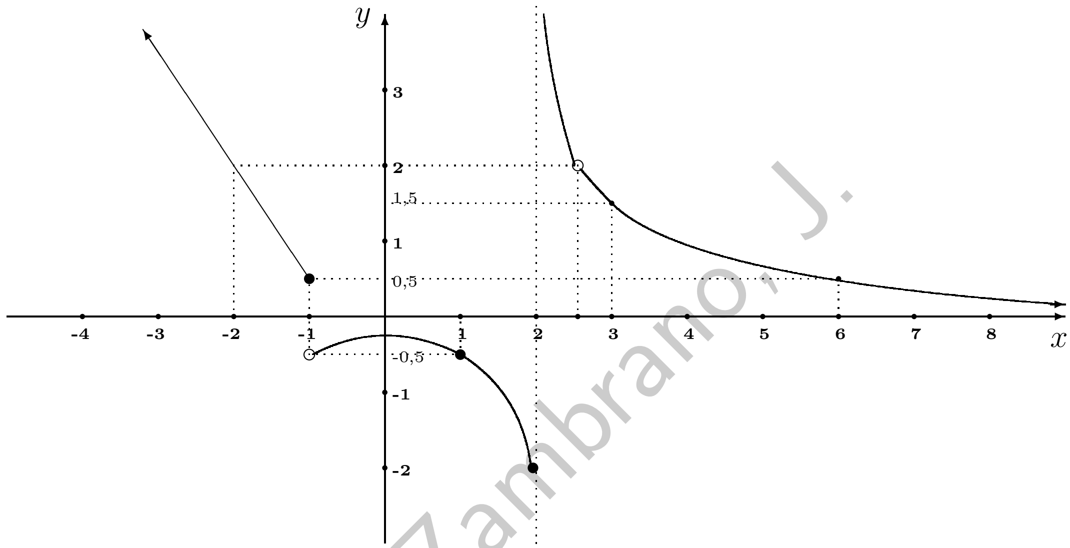
Observación 3.9. Si f es una función real de variable real que es continua en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ entonces es inmediato que

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Las funciones más comunes como polinomios, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas son continuas en su dominio.

3.6. Tipos de discontinuidad

Hay varios tipos de discontinuidad y para hacer un apronte a ello, consideremos la función real f cuyo gráfico se presenta a continuación.



Veamos lo que sucede en torno a los puntos

$$x_1 = -1{,}0, \quad x_2 = 1{,}0,$$
$$x_3 = 2{,}0, \quad x_4 = 2{,}5.$$

Si nos valemos de la noción intuitiva de continuidad, es decir que una función es continua si al hacer su gráfico, encontramos el siguiente comportamiento:

i	x_i	$\lim_{x\uparrow x_i} f(x)$	$\lim_{x\downarrow x_i} f(x)$	$f(x_i)$	Continuidad
1	-1.0	0.5	-0.5	0.5	No
2	1.0	-0.5	-0.5	-0.5	Sí
3	2.0	-2.0	$+\infty$	-2.0	No
4	2.5	2.0	2.0	no existe	No

Obsérvese que para concluir que una función es continua en el punto $x_2 = 1{,}0$ necesitamos que $f(x_2)$ y $\lim_{x\longrightarrow x_2}$ existan y sean iguales. En el punto $x_1 = -1{,}0$ coinciden $\lim_{x\uparrow x_1} f(x)$ y $f(x_1)$ pero no $\lim_{x\downarrow x_1} f(x)$; lo mismo acontece con x_3. En el punto x_4 coinciden los dos límites laterales pero $x_4 \notin$

Dom(f). Para clasificar los tipos de discontinuidad que presenta la función en los puntos x_1, x_3 y x_4, introducimos la siguiente

Definición 3.11. **Tipos de discontinuidad.** *Sea f una función real de variable real y sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que f es discontinua en x_0. Decimos entonces que f tiene una discontinuidad de primera especie en x_0 si*

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) \in \mathbb{R} \quad y \quad \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R};$$

caso contrario decimos que f tiene una desigualdad de segunda especie en x_0. Si

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) \in \mathbb{R},$$

decimos que f tiene una desigualdad evitable en x_0.

Observación 3.10. Obsérvese que la discontinuidad evitable es un caso particular de la discontinuidad de primera especie.

Observación 3.11. Sea f una función real de variable real y sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que se cumple que

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R};$$

pero

$$f(x_0) \neq L \qquad \vee \qquad x_0 \notin \mathrm{Dom}(f),$$

entonces f tiene una discontinuidad evitable en x_0. En este caso se puede **redefinir la función** f, es decir establecer una nueva función $\hat{f}$ que mantendrá casi toda la información que trae consigo la función original f pero que **elimina la discontinuidad**:

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathrm{Dom}(f) \cup \{x_0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \mathrm{Dom}(f) \\ L, & \text{si } x = x_0. \end{cases} \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior, en x_3 la función f tiene una discontinuidad de segunda especie. La función f tiene discontinuidades de primera especie en los puntos $x_1 = -1{,}0$ y $x_4 = 2{,}0$. De hecho, en x_4 hay una discontinuidad evitable y entonces la función

$$\begin{aligned} \hat{f} : \mathrm{Dom}(f) \cup \{x_4\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \mathrm{Dom}(f) \\ 2{,}0, & \text{si } x = x_4, \end{cases} \end{aligned}$$

es continua.

3.7. Teoremas sobre continuidad

Al analizar la continuidad de funciones, hay que tener presente los resultados importantes que presentamos en el siguiente

Teorema 3.3.

1. *La suma y el producto de un número finito de funciones que son continuas en una región determinada es, a su vez, una función continua en esa misma región.*
2. *El cociente de dos funciones continuas en una región determinada, es también una función continua, para todos los valores del argumento (en la misma región) en que no se anula el denominador.*
3. *La composición $f \circ g$ de dos funciones continuas f y g tales que $\mathrm{Rg}(g) \subset \mathrm{Dom}(f)$, es una función continua en la región $\mathrm{Dom}(g)$.*

El siguiente resultado es de suma importancia - resume las propiedades de una función que es continua en un intervalo cerrado.

Teorema 3.4. *Sea f una función continua en $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, donde $a < b$. Entonces,*

1. *La función f está acotada en $[a, b]$, es decir, existe un cierto número $M > 0$ tal que*

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M, \quad \forall x \in [a, b].$$

2. *La función f alcanza en $[a, b]$ su valor máximo y su valor mínimo, es decir, existen puntos x_{min} y x_{max} en $[a, b]$ tales que*

$$f_{max} \equiv f(x_{max}) \geqslant f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$
$$f_{min} \equiv f(x_{min}) \leqslant f(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

3. *La función f toma todos los valores entre f_{min} y f_{max}, es decir,*

$$\forall y_0 \in [f_{min}, f_{max}], \exists x_0 \in [a, b] : \quad f(x_0) = y_0.$$

Entonces,

$$\mathrm{Rg}(f) = [f_{min}, f_{max}].$$

Como consecuencia del punto 3 del Teorema 3.4 tenemos el siguiente corolario que nos dice que una función continua que tiene diferente signo en los extremos de un intervalo debe pasar por cero.

Corolario 3.1. ***Teorema de Bolzano.*** *Sea f una función continua en $[a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, donde $a < b$. Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, entonces existe al menos un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = 0$.*

Finalmente señalemos la siguiente importante propiedad de las funciones continuas. A grosso modo esta establece que si una función continua tiene un signo en un punto, en todos los puntos cercanos también tendrá el mismo signo.

Proposición 3.4. *Sea f una función real que es continua en $]a,b[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$ y sea $x_0 \in]a,b[$. Entonces,*

1. *Si $f(x_0) > 0$, existe un $\epsilon > 0$ (probablemente pequeño) tal que*
$$f(x) > 0, \quad \forall x \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[;$$
2. *Si $f(x_0) < 0$, existe un $\epsilon > 0$ (probablemente pequeño) tal que*
$$f(x) < 0, \quad \forall x \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[.$$

3.8. El Método de las Bisectrices para hallar los ceros de una función

Supongamos que se quiere resolver la ecuación

$$f(x) = 0, \quad x \in I, \tag{3.27}$$

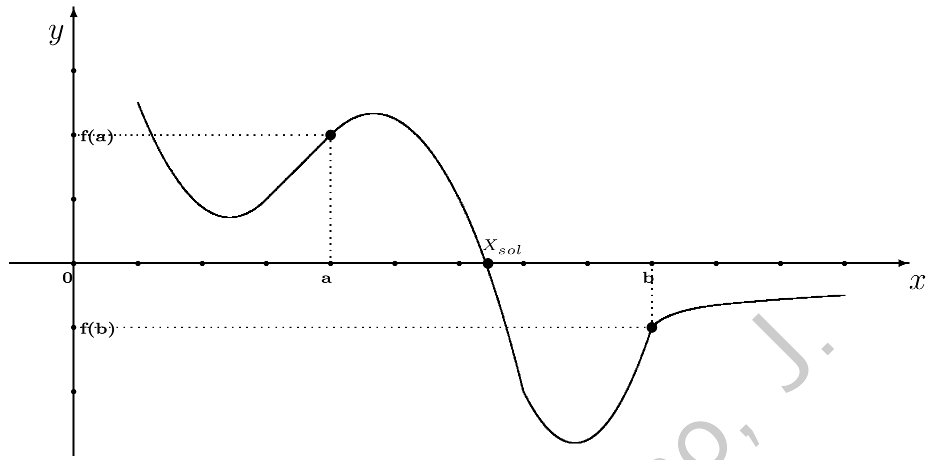
donde $f(x)$ es una fórmula dada e I es una región de $\mathbb{R}$. Lo primero que debemos hacer es calcular $DD[f(x)]$, el dominio de definición de $f(x)$, pues las soluciones buscadas estarán en

$$I \cap DD[f(x)].$$

Luego, antes de tratar de resolver mecánicamente (3.27) se debería usar el Corolario 3.1, esto es, deberíamos inspeccionar si existen puntos a y b en $I \cap DD[f(x)]$ de manera que

1. f es continua en $[a,b]$ y
2. $f(a)$ y $f(b)$ tienen diferente signo.

Bajo estas condiciones tenemos la **seguridad** de que existe una solución x_{sol} a nuestro problema en el intervalo $[a,b]$ sin siquiera haber empezado a buscar mecánicamente alguna solución de (3.27).



Finalmente, podríamos aplicar el siguiente **algoritmo** para aproximar una solución de (3.27) - a este proceso se le conoce como el **Método de las Bisectrices**.

1. Iniciamos el proceso poniendo

$$x_I = x_1; \tag{3.28}$$
$$x_F = x_2; \tag{3.29}$$

2. Para cada paso $i \geqslant 3$, ponemos

$$x_i = \frac{x_I + x_F}{2}.$$

   Si

$$\operatorname{sgn} f(x_i) = \operatorname{sgn} f(x_I),$$

   ponemos

$$x_I = x_i,$$

   caso contrario,

$$x_F = x_i.$$

La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ definida de esta manera es tal que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x_{sol},$$

donde x_{sol} es **una** solución de la ecuación (3.27).

En pseudocódigo el Método de las bisectrices se puede presentar de la siguiente manera

Require: $f(x)$
Require: $x_I, x_F \in \mathbb{R}$
Ensure: $x_I < x_F \wedge f(x_I) \cdot f(x_F) < 0$
Require: $\epsilon \in \mathbb{R}$
Ensure: $\epsilon > 0$
$x_{sol} \leftarrow (x_I + x_F)/2$
$F \leftarrow f(x_{sol})$
while $|F| > \epsilon$ **do**
  if $f(x_I) \cdot f(x_{sol}) > 0$ **then**
    $x_I \leftarrow x_{sol}$
  else
    $x_F \leftarrow x_{sol}$
  end if
  $x_{sol} \leftarrow (x_I + x_F)/2$
  $F \leftarrow f(x_{sol})$
end while
return x_{sol}

3.9. Cálculo de límites

Para calcular límites nos valemos de varios recursos. La noción intuitiva juega un rol importante así como el manejo de los teoremas y proposiciones sobre límites. Por otro lado hay un buen número de límites que aparecen con frecuencia y que deben ser bien conocidos por el estudiante para que pueda confrontar ejercicios con un mayor grado de complejidad - como cuando hay que tratar con una indeterminación $\frac{0}{0}$, 0^0, etc.

3.9.1. Límites Fundamentales

En lo que sigue, las letras x e y representan siempre variables reales.

Proposición 3.5. *Se tiene que*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\longrightarrow\infty} y\cdot\sin(1/y)=1. \tag{3.30}$$

Observación 3.12. El primer límite que aparece en (3.30) corresponde a una indeterminación del tipo $0/0$, es decir el límite del cociente de dos funciones que tienden a 0 en tanto que el argumento tiende a su objetivo. El segundo límite que aparece en (3.30) corresponde a una indeterminación del tipo $\infty\cdot 0$, es decir el límite del producto de dos funciones, una de las cuales tienden a cero y la otra tiende a ∞ cuando el argumento tiende a su objetivo.

La siguiente proposición se puede considerar como una definición de la base de los logaritmos neperianos.

Proposición 3.6. *Se tiene que*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\longrightarrow 0}(1+y)^{1/y}=e=2{,}71828\ldots \tag{3.31}$$

La proposición anterior es equivalente a la siguiente que corresponde a una indeterminación $0/0$.

Proposición 3.7. *Se tiene que*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \tag{3.32}$$

Los siguientes límites también son muy útiles:

Proposición 3.8. *Se tiene que*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{y\longrightarrow\infty} y\cdot\left(e^{1/y}-1\right)=1; \tag{3.33}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\arcsin x}{x}=1. \tag{3.34}$$

$$\lim_{x\downarrow 0} x^p\cdot\ln(x)=0,\quad \forall p\geqslant 1. \tag{3.35}$$

Proposición 3.9. *Sean $a > 0$ y f una función real tal que*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a.$$

Entonces se tiene que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty} (f(x))^x = \begin{cases} \infty, & \text{si } a > 1 \\ 0, & \text{si } 0 < a < 1. \end{cases} \tag{3.36}$$

3.9.2. Cambio de Variable

La mejor manera de presentar esta estrategia es via ejemplos:

Ejemplo 3.13. Supongamos que queremos saber si el siguiente límite existe, en cuyo caso nos interesa su valor:

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2}.$$

Este límite no aparece entre los límites fundamentales presentados en la Sección 3.9.1. Sin embargo, si observamos con detenimiento, caemos en cuenta que x^2 aparece tanto en el numerador como en el denominador. Se vuelve natural entonces que hagamos el cambio de variable

$$y = x^2.$$

Entonces, puesto que

$$y \longrightarrow 0, \qquad \text{cuando } x \longrightarrow 0,$$

se tiene, en virtud de la Proposición 3.30, que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

Veamos un ejemplo un poquito más complicado.

Ejemplo 3.14. Supongamos que queremos saber si el siguiente límite existe, en cuyo caso nos interesa su valor:

$$\lim_{x\downarrow 2} (x-2)^3 \cos(x-2) \ln(x-2).$$

Este límite no aparece entre los límites fundamentales presentados en la Sección 3.9.1. Sin embargo, si observamos con detenimiento, caemos en cuenta que $x-2$ aparece en más de una ocasión. Se vuelve natural entonces que hagamos el cambio de variable

$$y = x - 2.$$

Entonces, puesto que

$$y \downarrow 0, \qquad \text{cuando } x \downarrow 2,$$

se tiene, en virtud de las Proposiciones 3.8 y 3.3, que

$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow 2}(x-2)^3\cos(x-2)\ln(x-2) &= \lim_{y\downarrow 0} y^3\cos(y)\ln(y) && (3.37)\\
&= \lim_{y\downarrow 0}\cos(y)\cdot\lim_{y\downarrow 0} y^3\ln(y) && (3.38)\\
&= 1\cdot 0 && (3.39)\\
&= 0. && (3.40)
\end{aligned}$$

A partir de los límites presentados en la Sección 3.9.1 se pueden obtener, a través de cambios de variable apropiados, otros límites que también son de gran utilidad. Por ejemplo, el siguiente resultado generaliza la Proposición 3.6.

Proposición 3.10. *Sea $a \in \mathbb{R}$ y sean f y g dos funciones tales que*

$$\lim_{x\longrightarrow a} g(x) = k \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{x\longrightarrow a} f(x) = \infty.$$

Entonces,

$$\lim_{x\longrightarrow a}\left(1+\frac{g(x)}{f(x)}\right)^{f(x)} = e^k. \qquad (3.41)$$

El siguiente resultado generaliza la (3.33).

Proposición 3.11. *Sean $a, b > 0$. Se tiene que*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a^x - b^x}{x} = \ln(a) - \ln(b). \qquad (3.42)$$

3.9.3. Infinitésimos

El concepto de Infinitésimo es bastante útil para calcular límites.

Definición 3.12. *Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y sea α una función real tal que*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \alpha(x) = 0.$$

Se dice entonces que "$\alpha(x)$ es un infinitésimo cuando $x \longrightarrow a$".

De esta definición se hace inmediato que la suma y producto de infinitésimos (cuando $x \longrightarrow a$) es un infinitésimo (cuando $x \longrightarrow a$).

Ejemplo 3.15. Puesto que

$$\lim_{x \downarrow 0} x^p = 0, \quad \forall p > 0, \tag{3.43}$$

se tiene que $\alpha_p(x) = x^p$ es un infinitésimo cuando $x \longrightarrow 0^+$.

La siguiente definición tiene que ver con la rapidez con que un infinitésimo se acerca a 0.

Definición 3.13. *Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ dos infinitésimos cuando $x \longrightarrow a$. Supongamos que*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \in \mathbb{R}.$$

Si $C \neq 0$, decimos que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son "infinitésimos del mismo orden (cuando $x \longrightarrow a$)". En particular, si $C = 1$ decimos que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son "equivalentes (cuando $x \longrightarrow a$)", esto se denota como

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad \text{cuando } x \longrightarrow a. \tag{3.44}$$

Si $C = 0$ decimos que "$\alpha(x)$ es un infinitésimo de orden superior respecto a $\beta(x)$ (cuando $x \longrightarrow a$)".

Ejemplo 3.16. Puesto que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos(x+\pi/4)\cdot(e^x-1)}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

se sigue que $\alpha(x) = \cos(x+\pi/4)\cdot(e^x-1)$ y $\beta(x) = x$ son infinitésimos del mismo orden cuando $x \longrightarrow 0$.

Observación 3.13. Si $0 < p < q$ se tiene claramente que

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{x^q}{x^p} = \lim_{x \downarrow 0} x^{q-p} = 0.$$

Entonces $q > p > 0$ implica que x^q es de orden superior con respecto a x^p cuando $x \downarrow 0$.

El siguiente resultado es sumamente útil pues permite reemplazar un infinitésimo complicado por otro más simple en tanto que sean equivalentes. El resultado establece que la relación de equivalencia entre infinitésimos es transitiva.

Proposición 3.12. *Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Supongamos que*

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad \text{cuando } x \longrightarrow a,$$
$$\beta(x) \sim \gamma(x), \quad \text{cuando } x \longrightarrow a.$$

Entonces,

$$\alpha(x) \sim \gamma(x), \quad \text{cuando } x \longrightarrow a.$$

Observación 3.14. Por lo visto en la Sección 3.9.1, se tiene, cuando $x \longrightarrow 0$, que

$$x \sim \sin(x) \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \sim \arcsin(x) \sim \tan(x) \sim \arctan(x). \tag{3.45}$$

Se tiene que además que las potencias x^p con $p \geqslant 1$ son de orden superior que $\ln(x)$.

Ejemplo 3.17. Usando el cambio de variable $y = x^2$ y las equivalencias de la Observación 3.14 calculamos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\tan(x^2)} \\ &= \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{\tan(y)} \\ &= \lim_{y \longrightarrow 0} \cos(y) \cdot \frac{\ln(1+y)}{\sin(y)} \\ &= \lim_{y \longrightarrow 0} \cos(y) \cdot \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{\sin(y)} \\ &= 1 \cdot \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{y}{y} \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Finalmente observemos que cuando se suman dos infinitesímos de orden diferente, esta sumna es equivalente al infinitésimo de orden inferior. Este es el contenido de la siguiente

Proposición 3.13. *Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Supongamos que, cuando $x \longrightarrow a$, $\alpha(x)$ es un infinitésimo de orden superior respecto a $\beta(x)$. Entonces,*

$$\alpha(x) + \beta(x) \sim \beta(x), \quad \textit{cuando } x \longrightarrow a. \tag{3.47}$$

Ejemplo 3.18. Usamos la proposición anterior, la Observación 3.13 y el cambio de variable $y = \sin^2(x)$ para calcular

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\arctan(\sin^2(x))}{\sin^2(x) - \sin^4(x)} \\ &= \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y - y^2} \\ &= \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.19. Nuevamente usando infinitésimos calculamos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3+5x^4}}{\ln(1+2x)} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

3.9.4. Infinitos

El concepto de Infinito es bastante útil para calcular límites.

Definición 3.14. *Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y sea α una función real tal que*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \alpha(x) = \infty.$$

Se dice entonces que "$\alpha(x)$ es un infinito cuando $x \longrightarrow a$".

De esta definición se hace inmediato que la suma (no la resta) y el producto de infinitos (cuando $x \longrightarrow a$) es un infino (cuando $x \longrightarrow a$).

Ejemplo 3.20. Puesto que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} x^p = \infty, \quad \forall p > 0, \tag{3.48}$$

se tiene que $\alpha_p(x) = x^p$ es un infinito cuando $x \longrightarrow \infty$.

La siguiente definición tiene que ver con la rapidez con que crece un infinito.

Definición 3.15. *Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ dos infinitos cuando $x \longrightarrow a$. Supongamos que*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \in \mathbb{R}.$$

Si $C \neq 0$, decimos que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son "infinitos del mismo orden (cuando $x \longrightarrow a$)". En particular, si $C = 1$ decimos que $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son "equivalentes (cuando $x \longrightarrow a$)", esto se denota como

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad \text{cuando } x \longrightarrow a. \tag{3.49}$$

Si $C = 0$ decimos que "$\beta(x)$ es un infinimo de orden superior respecto a $\alpha(x)$ (cuando $x \longrightarrow a$)".

Observación 3.15. La definición anterior es análoga a la definición de infinitésimo que presentamos en la sección anterior. Sin embargo obsérvese que cuando $C = 0$ el infinito de orden superior es el denominador (para el caso de infinitésimos era el numerador).

Ejemplo 3.21. Puesto que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{x} + \pi/4\right)/(e^{1/x} - 1)}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

se sigue que $\alpha(x) = \cos\left(\frac{1}{x} + \pi/4\right)/(e^{1/x} - 1)$ y $\beta(x) = x$ son infinitos del mismo orden cuando $x \longrightarrow \infty$.

Observación 3.16. Si $0 < p < q$ se tiene claramente que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{x^p}{x^q} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{1}{x^{q-p}} = 0.$$

Entonces $q > p > 0$ implica que x^q es un infinito de orden superior con respecto a x^p cuando $x \longrightarrow \infty$.

El siguiente resultado es sumamente útil pues permite reemplazar un infinito complicado por otro más simple en tanto que sean equivalentes. El resultado establece que la relación de equivalencia entre infinitos es transitiva.

Proposición 3.14. *Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Supongamos que*

$$\begin{aligned} \alpha(x) \sim \beta(x), &\quad \text{cuando } x \longrightarrow a, \\ \beta(x) \sim \gamma(x), &\quad \text{cuando } x \longrightarrow a. \end{aligned}$$

Entonces,

$$\alpha(x) \sim \gamma(x), \quad \text{cuando } x \longrightarrow a.$$

Observación 3.17. Las potencias x^p con $p \geqslant 1$ son infinitos de orden superior con respecto a $\ln(x)$, es decir,

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0, \quad \forall p \geqslant 1.$$

Ejemplo 3.22. Usando el cambio de variable $y = 1 + x^2$ calculamos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \longrightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \\ &= \lim_{y \longrightarrow \infty} \frac{\ln(y)}{y} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Nótese que cuando se suman dos infinitos de orden diferente, esta suma es equivalente al infinito de orden superior. Este es el contenido de la siguiente

Proposición 3.15. *Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Supongamos que, cuando $x \longrightarrow a$, $\alpha(x)$ es un infinito de orden superior respecto a $\beta(x)$. Entonces,*

$$\alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x), \quad \text{cuando } x \longrightarrow a. \tag{3.51}$$

Ejemplo 3.23. Usamos la proposición anterior y los cambios de variable $y = \ln(x)$ y $z = y^2$para calcular

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\longrightarrow\infty} (\ln^2(x) + \ln(x)) \cdot \left(1 - e^{1/\ln^2(x)}\right) \\
&= \lim_{y\longrightarrow\infty} (y^2 + y) \cdot \left(1 - e^{1/y^2}\right) \\
&= \lim_{y\longrightarrow\infty} y^2 \cdot \left(1 - e^{1/y^2}\right) \\
&= \lim_{z\longrightarrow\infty} z \cdot \left(1 - e^{1/z}\right) \\
&= -1.
\end{aligned}$$

3.10. Ejercicios resueltos

Observación 3.18. Si se busca el límite de la razón de dos polinomios cuando el argumento tiende a $+\infty$ o a $-\infty$ se puede usar de buena manera la técnica de infinitos. En efecto, la estrategia consiste en dejar tanto en el numerador como en el denominador sólo los infinitos de mayor orden para entonces compararlos usando las Observaciones 3.13 y 3.17. Esta estrategia puede usarse a menudo cuando se trata de fracciones que contienen expresiones irracionales. Mostramos como funciona esto a través de algunos ejemplos.

Ejemplo 3.24. Consideremos los polinomios

$$\begin{aligned}
p(x) &= 1 + 2x^2 - 5x^3, \\
q(x) &= 2 + 2x^3, \\
r(x) &= -3 + 4x^2 + 2x^4, \\
s(x) &= -2 + x + x^2.
\end{aligned}$$

Usamos infinitos para calcular

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{p(x)}{q(x)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1 + 2x^2 - 5x^3}{2 + 2x^3} \\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-5x^3}{2x^3} \\
&= -\frac{5}{2}. \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{p(x)}{r(x)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1+2x^2-5x^3}{-3+4x^2+2x^4} \\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-5x^3}{2x^4} \\
&= -\frac{5}{2}\cdot \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{x} \\
&= 0. \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{p(x)}{s(x)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1+2x^2-5x^3}{-2+x+x^2} \\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{-5x^3}{x^2} \\
&= -5\cdot \lim_{x\longrightarrow\infty} x \\
&= -\infty. \qquad (3.54)
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.25. Nuevamente usando infinitos calculamos

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt[3]{-x^3+5x^4}}{x^{4/3}-x} \\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt[3]{5x^4}}{x^{4/3}} \\
&= \sqrt[3]{5}
\end{aligned}$$

Observación 3.19. Si $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y si para un cierto $a\in\mathbb{R}$ se tiene que

$$p(a)=q(a)=0,$$

se recomienda simplificar la fracción $p(x)/q(x)$, por el binomio $x-a$, una o varias veces. Esta estrategia puede aplicarse frecuentemente a expresiones irracionales a través de un cambio de variable apropiado. Veamos un par de ejemplos al respecto.

Ejemplo 3.26. Calculamos

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{2x^2-8}{x^2-3x+2}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 2}\frac{2(x+2)}{x-1}\\ &= 8. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.27. Usamos el cambio de variable

$$1+2x=y^6,$$

para calcular

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1}\\ &= \lim_{y\longrightarrow 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}\\ &= \lim_{y\longrightarrow 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}\\ &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Observación 3.20. Sea $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\,\infty\}$ y supongamos que

$$\lim_{x\longrightarrow a}\phi(x)=A\in(0,\infty)\cup\{\infty\},$$
$$\lim_{x\longrightarrow a}\sigma(x)=B\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\,\infty\}.$$

Para calcular

$$L=\lim_{x\longrightarrow a}\phi(x)^{\sigma(x)},$$

se consideran tres casos:

i) Si $A\in(0,\infty)$ y $B\in\mathbb{R}$. En este caso tenemos:

$$L=A^B.$$

ii) Si $A \in (0, \infty)$ y $B \in \{-\infty, +\infty\}$. El problema se resuelve directamente con ayuda de la Proposición 3.9.

iii) Si $A = 1$ y $B = +\infty$. En este caso escribimos

$$\phi(x) = 1 + \frac{1}{f(x)},$$

donde $f(x)$ es un infinito cuando $x \longrightarrow a$ para aplicar entonces la Proposicion 3.10. En el mejor de los casos esto nos lleva a que

$$L = e^T,$$

con

$$T = \lim_{x \longrightarrow a} \sigma(x) \cdot (\phi(x) - 1).$$

Ejemplo 3.28. Usamos la Observación 3.20, los cambios de variable $y = \frac{x}{2}$ y $z = -2y^2$ e infinitésimos equivalentes para calcular

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \longrightarrow 0} (\cos(x))^{1/x^2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} [1 + (-1 + \cos(x))]^{1/x^2} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0} [1 - 2\sin^2(x/2)]^{1/x^2} \\ &= \lim_{y \longrightarrow 0} [1 - 2\sin^2(y)]^{1/(4y^2)} \\ &= \lim_{y \longrightarrow 0} [1 - 2y^2]^{1/(4y^2)} \\ &= \lim_{z \longrightarrow 0} [1 + z]^{-1/(2z)} \\ &= \left(\lim_{z \longrightarrow 0} [1 + z]^{1/z)} \right)^{-1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}. \end{aligned} \tag{3.55}$$

Ejemplo 3.29. Calculemos el límite

$$L = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x + 2} \right)^{x+1}. \tag{3.56}$$

Puesto que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1}{x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x + 2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^5}{x^5} = 1$$

y

$$\lim_{x\to\infty} x+1=\infty,$$

estamos tratando con una indeterminación 1^∞, que está relacionada con el límite clásico

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}.$$

Entonces, escribimos (3.56) como

$$L=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x^5-4x^4+2x^3-x^2+2x+1}{x^5-2x^4+x^3+x^2-x+2}\right)-1\right]^{x+1}. \tag{3.57}$$

Ponemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{x^5-4x^4+2x^3-x^2+2x+1}{x^5-2x^4+x^3+x^2-x+2}-1 \\ &= \frac{-2x^4+x^3-2x^2+3x-1}{x^5-2x^4+x^3+x^2-x+2} \end{aligned}$$

y puesto que

$$\lim_{x\to\infty} y=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^4+x^3-2x^2+3x-1}{x^5-2x^4+x^3+x^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^4}{x^5}=0,$$

tenemos a partir de (3.57) que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to 0}}\left[(1+y)^{1/y}\right]^{(y(x+1))} \\ &= \lim_{x\to\infty}\left[\lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right]^{(y(x+1))} \\ &= \lim_{x\to\infty} e^{y(x+1)}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Ahora, puesto que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} y(x+1) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)(-2x^4+x^3-2x^2+3x-1)}{x^5-2x^4+x^3+x^2-x+2} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^5-x^4-x^3+x^2+2x-1}{x^5-2x^4+x^3+x^2-x+2} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^5}{x^5} \\ &= -2, \end{aligned}$$

se sigue, a partir de (3.58), que

$$L = e^{-2}.$$

Ejemplo 3.30. Calculemos el límite

$$L = \lim_{x\to 0} \left[1 + \ln\left(1 + \sin^2(x)\right)\right]^{7/(\arctan(e^{x^2}-1))}. \tag{3.59}$$

Es claro que tratamos con una indeterminación de la forma 1^∞. Puesto que $\sin(x) \sim x$, cuando $x \to 0$, tenemos que

$$L = \lim_{x\to 0} \left[1 + \ln\left(1 + x^2\right)\right]^{7/(\arctan(e^{x^2}-1))}. \tag{3.60}$$

Ponemos ahora

$$\begin{aligned} & y = x^2, \\ x \to 0 \quad \Rightarrow \quad & y \to 0, \end{aligned}$$

así que

$$L = \lim_{y\to 0} \left[1 + \ln(1+y)\right]^{7/(\arctan(e^y-1))}. \tag{3.61}$$

Ahora, puesto que cuando $y \to 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \ln(1+y) &\sim y, \\ e^y - 1 &\sim y, \\ \arctan(y) &\sim y, \end{aligned}$$

se sigue a partir de (3.61) que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{y\to 0} (1+y)^{7/y} \\ &= e^7. \end{aligned}$$

Ejemplo 3.31. Calculemos el límite

$$L = \lim_{x\longrightarrow\infty} \left(\frac{2e^x - \ln(x)}{e^x + x^2 - 5x + 1}\right)^{3x+1-\ln(x)}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2e^x-\ln(x)}{e^x+x^2-5x+1}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{2e^x}{e^x}=2,$$

y

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}(3x+1-\ln(x))=+\infty,$$

se sigue por la Proposición 3.9 que

$$L=\infty.$$

Ejemplo 3.32. Calculemos el límite

$$L=\lim_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{x^3+x^2-\ln(x)}{3x^3+1}\right)^{\ln(x^2)}.$$

Puesto que

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3+x^2-\ln(x)}{3x^3+1}=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{x^3}{3x^3}=\frac{1}{3},$$

y

$$\lim_{x\longrightarrow\infty}\ln(x^2)=\lim_{x\longrightarrow\infty}2\ln(x)=+\infty,$$

se sigue por la Proposición 3.9 que

$$L=0.$$

Ejemplo 3.33. Calculemos el límite

$$L=\lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(cx^p-x+\ln(x))}{\ln(ax^q+bx^2-\ln(x))},$$

donde $p>1$, $q\in]1;2[$, $a,b,c\in\mathbb{R}^+$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(cx^p-x+\ln(x))}{\ln(ax^q+bx^2-\ln(x))}\\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(cx^p)}{\ln(bx^2)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{\ln(c)+p\cdot\ln(x)}{\ln(b)+2\ln(x)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow\infty}\frac{p\cdot\ln(x)}{2\ln(x)}\\
&= \frac{p}{2}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 3.34. Estudiemos la continuidad de la función determinada por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\ln(1+3\sin(x-1))}{3\tan(e^{2(x-1)}-1)}, & \text{si } x \in [0{,}8; 2{,}5] \setminus \{1\}, \\ q, & \text{si } x = 1, \end{cases}$$

donde $q \in \mathbb{R}$. Conforme al Teorema 3.3, la función f es continua en $[0{,}8; 2{,}5] \setminus \{1\}$ (¿por qué?). Por lo que sólo resta analizar si f es o no continua en $x = 1$. Calculemos entonces

$$L = \lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{2\ln(1+3\sin(x-1))}{3\tan(e^{2(x-1)}-1)}.$$

Para ello, hacemos el cambio de variable

$$\begin{array}{rcl} & & y = x-1, \\ x \longrightarrow 1 & \Rightarrow & y \longrightarrow 0, \end{array} \tag{3.62}$$

así que

$$L = \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{2\ln(1+3\sin(y))}{3\tan(e^{2y}-1)}.$$

Ahora, observamos que cuando $y \longrightarrow 0$,

$$\begin{array}{rcl} & & \sin(y) \sim y; \\ \ln(1+y) \sim y & \Rightarrow & \ln(1+3y) \sim 3y; \\ e^y - 1 \sim y & \Rightarrow & e^{2y} - 1 \sim 2y; \\ \tan(y) \sim y & \Rightarrow & \tan(2y) \sim 2y; \end{array}$$

por lo cual

$$\begin{aligned} L &= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{2\ln(1+3\sin(y))}{3\tan(e^{2y}-1)} \\ &= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{2\ln(1+3y)}{3\tan(2y)} \\ &= \lim_{y\longrightarrow 0} \frac{2\cdot 3y}{3\cdot 2y} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Entonces, puesto que $f(0) = q$, se tiene que

a) f es continua en $[0{,}8; 2{,}5] \setminus \{1\}$ si $q \neq 1$;

b) f es continua en $[0{,}8; 2{,}5]$ si $q = 1$.

Para finalizar esta sección presentamos un ejercicio resuelto que abarca muchos de los puntos tratados en este capítulo.

Ejemplo 3.35. Considere la ecuación

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.63}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 6x - 5, & \text{si } x \leqslant 5, \\ (x-5)^2 \cdot \ln(x-5) - \sin(x-5), & \text{si } x > 5. \end{cases} \tag{3.64}$$

a) ¿Existe una solución de (3.63) en $[3{,}0,\ 5{,}8]$?

b) ¿Existe una solución de (3.63) en $[5{,}8,\ 8{,}0]$?

c) ¿Existe una solución de (3.63) en $]-\infty,\ 3{,}0]$?

d) Para el literal a): si existe solución halle una aproximación con error aceptable $\epsilon = 0{,}15$.

Indicación.- Puede usar el hecho que

$$\lim_{x \downarrow 0} x^p \cdot \ln x = 0, \quad \forall p \geqslant 1.$$

Desarrollo. Empecemos observando que $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Es bastante claro que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

¿Es f continua en $x = 5$? A partir de (3.64) es claro que

$$f(5) = 0 = \lim_{x \uparrow 5} f(x).$$

Por tanto, para concluir que f es continua en $x = 5$ (y entonces en todo $\mathbb{R}$) nos basta probar que

$$\lim_{x \downarrow 5} f(x) = 0.$$

Lo último es cierto. Para ello hacemos el cambio de variable $y = x - 5$ y usamos la indicación:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\downarrow 5} f(x) &= \lim_{x\downarrow 5} (x-5)^2 \cdot \ln(x-5) - \sin(x-5) \\
&= \lim_{y\downarrow 0} y^2 \cdot \ln(y) - \sin(y) \\
&= \lim_{y\downarrow 0} y^2 \cdot \ln(y) - \lim_{y\downarrow 0} \sin(y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que f es continua en $\mathbb{R}$.

Se tiene que

$$\begin{aligned}
f(3{,}0) &= 4 > 0, \\
f(5{,}8) &= -0{,}86017 < 0, \\
f(8{,}0) &= 9{,}7464 > 0.
\end{aligned}$$

a) Puesto que f es continua en $[3{,}0,\ 5{,}8]$ y además $f(3{,}0)$ y $f(5{,}8)$ tienen diferente signo, concluimos por el Teorema de Bolzano (véase Corolario 3.1) que existe $x_{sol1} \in (3{,}0,\ 5{,}8)$ tal que

$$f(x_{sol1}) = 0.$$

b) Puesto que f es continua en $[5{,}8,\ 8{,}0]$ y además $f(8{,}0)$ y $f(5{,}8)$ tienen diferente signo, concluimos por el Teorema de Bolzano (véase Corolario 3.1) que existe $x_{sol2} \in (5{,}8,\ 8{,}0)$ tal que

$$f(x_{sol2}) = 0.$$

b) Puesto que f es continua en $(-\infty,\ 3{,}0]$ y además $f(3{,}0) = 4 > 0$, podremos concluir que existe un $x_{sol3} \in (-\infty,\ 3{,}0)$ tal que

$$f(x_{sol3}) = 0$$

si encontramos un $x_* \in (-\infty,\ 3{,}0)$ tal que $f(x_*) < 0$. Poniendo $x_* = 0$ estamos listos pues

$$f(0) = -5 < 0.$$

d) Para calcumar aproximadamente $x_{sol3} \in (-\infty, 3{,}0)$ usamos el Método de las Bisectrices (véase Sección 3.8) con $\epsilon = 0{,}15$. Tenemos:

i	x_i	$f(x_i)$	$\lvert f(x_i)\rvert$
1	0.00000	-5.00000000	5.00000000
2	3.00000	+4.00000000	4.00000000
3	1.50000	+1.75000000	1.75000000
4	0.87500	-0.51562500	0.51562500
5	1.18750	+0.71484375	0.71484375
6	1.03125	+0.12402300	0.12402300
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Entonces

$$x_{sol3} \approx 1{,}03125.$$

Este valor cumple con el error máximo aceptable que impusimos al aplicar el método de las bisectrices, $\epsilon = 0{,}15$. Por otro lado, obsérvese que la solución exacta es

$$x_{sol3} = 1{,}00000.$$

$\square$

3.11. Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1. Considere la función definida por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x+2}{x-2}, & \text{si } x \neq 2, \\ A, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar A para que la función f sea continua? Construya la gráfica de la función f.

Ejercicio 3.2. Considere la función definida por la fórmula

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{si } x \leqslant \alpha, \\ 2x+b, & \text{si } x > \alpha, \end{cases}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. ¿Qué relación deben verificar a y b para que la función f sea continua?

Ejercicio 3.3. Considere la fórmula $f(x)$. Halle su dominio de definición y analice la continuidad de la función asociada a la fórmula. Cuando sea posible, redefina la función para que resulte continua.

1. $f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$, donde $n \in \mathbb{N}$.
   Indicación: $\hat{f}(0) = n$.
2. $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$.
3. $f(x) = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$.
4. $f(x) = \frac{5^x-2^{-x}}{x}$.
5. $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$.
6. $f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$.
7. $f(x) = \frac{x}{|x|}$.
8. $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen} x}$.
9. $f(x) = e^{\frac{1}{1+x}}$.
10. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

11. $f(x) = (1+x)\arctan\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$.

Ejercicio 3.4. Hallar $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x)$ si

1. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$;
2. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{7x-3}$;
3. $f(x) = \frac{(4x+1)^3(2x-1)^2}{x^5-2x^2+1}$;
4. $f(x) = \frac{5x^2-4}{\sqrt{x^4+1}}$;
5. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{7x-3}$;
6. $f(x) = \frac{(4x+1)^3(2x-1)^2}{x^5-2x^2+1}$;
7. $f(x) = x\,\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$;
8. $f(x) = \left(\frac{x+1}{2x-3}\right)^{x^2}$;
9. $f(x) = \left(\frac{x^2-1}{2x^2-3}\right)^{x^3}$;
10. $f(x) = \left(1 - \frac{\cos(x+\pi/8)\arctan(x)}{x^2-5}\right)^{1/\sin(x)}$;
11. $f(x) = (\cos(1/x))^{1/\sin^2(x)}$;
12. $f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$;
13. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-x^{3/2}-1}}$;
14. $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$;
15. $f(x) = x\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$;
16. $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Ejercicio 3.5. Hallar $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x)$ si

1. $f(x) = \frac{(y+x)^3-y^3}{x}$;

2. $f(x) = \frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{-1+\sqrt[3]{1+x^2}}$;
3. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^3}-\sqrt{1-x^3}}{x^3}$;
4. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{y+x}-\sqrt[3]{y}}{x}$;
5. $f(x) = \frac{1-\cos(\sin^2(x))}{\sin^4(x)}$;
6. $f(x) = \frac{\tan(x^2)-\sin(x^2)}{x^6}$;
7. $f(x) = \frac{1-\sqrt{\cos(\sin(x))}}{\sin^2(x)}$;
8. $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sin(x)}-\sqrt{1-\tan(x)}}{\arctan(x)}$;
9. $f(x) = \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\arctan(x)}{\sin(x)}}$;
10. $f(x) = \frac{1}{x}\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

Ejercicio 3.6. Hallar $\lim_{x\longrightarrow a} f(x)$ si

1. $f(x) = \frac{x^4-1}{x^4+3x^2+2}$, $a = -1$;
2. $f(x) = \frac{x^2-(b+1)x+b}{x^3-b^3}$, $a = b \in \mathbb{R}$;
3. $f(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$, $a = 1$;
4. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^4}-2\sqrt[3]{x^2}+1}{(x^2-1)^2}$, $a = 1$;
5. $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$, $a = 3$;
6. $f(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\sin(3\pi x)}$, $a = 1$;
7. $f(x) = (1-x)\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $a = 1$;
8. $f(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{1-\sqrt{x}}$, $a = 1$.

Ejercicio 3.7. Hallar $\lim_{x\downarrow a} f(x)$ y $\lim_{x\uparrow a} f(x)$ si

1. $f(x) = \frac{1}{1+e^{1/x}}$, $a = 0$;
2. $f(x) = \frac{|\sin(x)|}{x}$, $a = 0$;
3. $f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}$, $a = 1$;
4. $f(x) = \frac{x}{x-2}$, $a = 2$.

Ejercicio 3.8. La ecuación

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

tiene una solución x_0 en el intervalo $[1, 2]$. ¿Por qué? Calcúlela aproximadamente.
Indicación.- $x_0 \approx 1{,}5320888$.

Ejercicio 3.9. La ecuación

$$h(x) = 0$$

tiene una solución x_0 en el intervalo $[a, b]$. Grafique $h(x)$ en [a,b] y calcúle la solución aproximadamente.

1. $h(x) = x - \tan x + 1$, con $a = 0$, $b = 1{,}74$;
2. $h(x) = x - e^{\operatorname{sen} x} + 2$, con $a = -3$, $b = 0$.

Ejercicio 3.10. Considere la fórmula

$$\phi(x) = x \ln x - x.$$

1. Halle el dominio de definición de $\phi(x)$ y grafíquela. Analice la continuidad de ϕ y extiéndala a una función continua $\hat{\phi}$ sobre $[0, \infty[$.
2. Resuelva la ecuación
$$\phi(x) + 0{,}5 = 0,$$
en el intervalo $[0, 1]$.
Indicación.- $x_1 \approx 0{,}1866823$.
3. Resuelva la ecuación anterior en $[1, 3]$.
Indicación.- $x_1 \approx 2{,}1555353$.

Ejercicio 3.11. Denotemos por r_1 y r_2 a las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Si los coeficientes b y c se mantienen constantes, ¿qué pasa con r_1 y r_2 cuando $a \longrightarrow 0$?

Ejercicio 3.12. El punto X_1 divide al segmento $AB = l$ en dos partes iguales; el punto X_2 divide al segmento AX_1 en dos partes también iguales; el punto X_3 divide, a su vez, el segmento X_2X_1 en dos partes iguales; el punto X_4 hace lo propio con el segmento X_2X_3 y así sucesivamente. Determinar la posición límite de X_n, cuando $n \longrightarrow \infty$.

Ejercicio 3.13. Halle las constantes k y b de manera que se cumple que

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} \left(kx + b - \frac{x^3+1}{x^2+1} \right) = 0.$$

Ejercicio 3.14. Demostrar que la ecuación

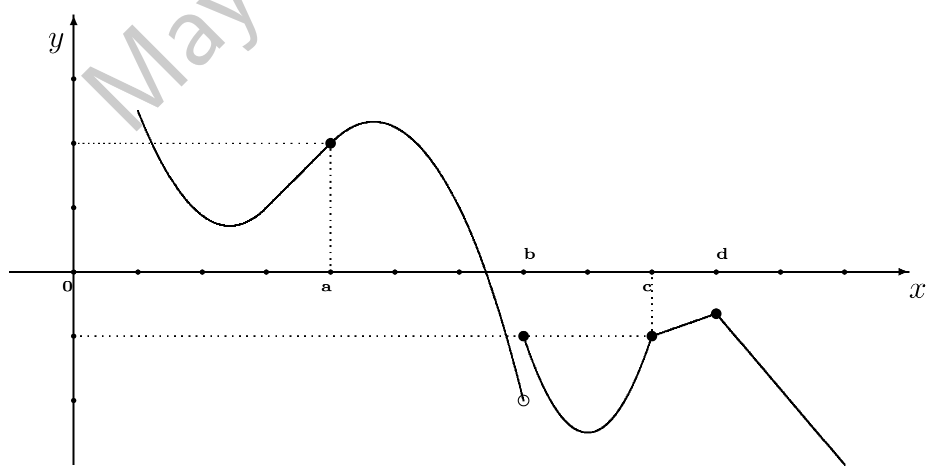
$$\tan(x) = x,$$

tiene una infinidad de raíces reales.

CAPÍTULO 4

La derivada y sus aplicaciones

En el Capìtulo 3 se estudiaron los conceptos de continuidad y límite de una función real de variable real. De manera intuitiva dijimos que una función es continua cuando su gráfica no presenta cortes o saltos. El objetivo de este capítulo es estudiar el concepto de derivabilidad. Intuitivamente, una función f será derivable en un punto $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ si la gráfica de f es continua en x_0 y si, *además*, el cambio de $f(x)$ es *suave* cuando x está en las cercanías de x_0 - dicho de otra manera, cuando la gráfica de f no presenta una "*punta*" en x_0.



Conforme a la noción intuitiva que acabamos de mencionar, tenemos que la función representada en el gráfico es derivable en $x = a$ pero no lo es en los puntos $x \in \{b, c, d\}$. Esta noción es consistente con la siguiente

Definición 4.1. *Sea f una función continua en el intervalo $]a, b[$, $a < b$, y sea $x_0 \in]a, b[$. Se dice que f es derivable en $x = x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ si*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \equiv f'(x_0) \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

En este caso, se dice que $f'(x_0)$ es la derivada de f en el punto $x = x_0$. Si f es continua en todo punto $x \in I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$, decimos que f es continua en I.

Observación 4.1. También suelen encontrarse las siguientes **notaciones alternativas** para la derivada de una función f en un punto x_0:

$$f'(x_0) = \frac{d\,f}{d\,x}(x_0) = \dot{f}(x_0) = f_x(x_0) = D_x\, f(x_0). \tag{4.2}$$

Nosotros usaremos principalmente la primera notación y, sólo cuando hace las cosas más intuitivas, la segunda notación.

Nuestra primera proposición nos dice que la "suavidad" de la curva de una función f, cuando x tiende a x_0 tiene que ser la misma si nos movemos desde la derecha o desde la izquierda. Para medir la suavidad desde la izquierda introducimos la idea de **derivada por la izquierda de f en $x = x_0$**:

$$f'_-(x_0) \equiv \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Para medir la suavidad desde la derecha introducimos la idea de **derivada por la derecha de f en $x = x_0$**:

$$f'_+(x_0) \equiv \lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Proposición 4.1. *Para que exista la derivada de una función f en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ es necesario y suficiente que*

i) f *sea continua en* $x = x_0$;

ii) $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) \in \mathbb{R}$.

En este caso,

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Ejemplo 4.1. Consideremos la función Valor Absoluto:

$$\mathrm{Abs}(x) \equiv |x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

A partir de su definición podemos ver

$$\mathrm{Abs}'(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ -1, & \text{si } x < 0; \end{cases}$$

pero, puesto que

$$\mathrm{Abs}'_+(0) = 1 \neq -1 = \mathrm{Abs}'_-(0),$$

la función valor absoluto no es derivable en $x = 0$.

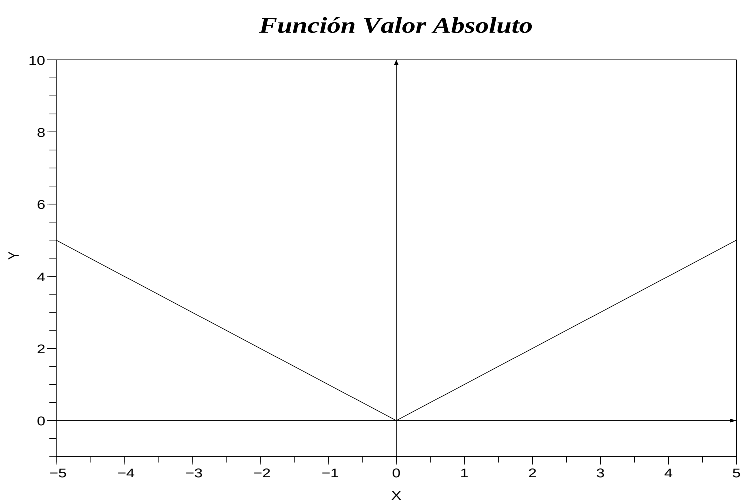


Fig. 59

En los siguientes dos ejemplos derivamos mediante la fórmula (4.1) las funciones Seno y Logaritmo Natural.

Ejemplo 4.2. Sea $f(x) = \ln(x)$, si $x > 0$. Usamos el cambio de variable $\alpha = h/x_0$ para calcular $f'(x_0)$, con $x = x_0 > 0$:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(x_0+h) - \ln(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln((x_0+h)/x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+\frac{h}{x_0})}{h} \\
&= \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha x_0} \\
&= \frac{1}{x_0} \cdot \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \\
&= \frac{1}{x_0}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.3. Sea $f(x) = \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Usamos el hecho que

$$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\sin(B)\cos(A), \quad A, B \in \mathbb{R},$$

y el cambio de variable $\alpha = h/2$, para calcular $f'(x_0)$, cuando $x = x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{2\sin(h/2)\cos(x_0+h/2)}{h} \\
&= \left(\lim_{h \longrightarrow 0} \cos(x_0+h/2)\right) \cdot \left(\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{\sin(h/2)}{h/2}\right) \\
&= \cos(x_0) \cdot \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \\
&= \cos(x_0).
\end{aligned}$$

4.1. Reglas de derivación

Usando las herramientas vistas en el Capítulo 3 para el cálculo de límites y la fórmula (4.1) se puede proceder como en los Ejemplos 4.2 y 4.3 para obtener las siguientes reglas de derivación:

Proposición 4.2. *Sea $c \in \mathbb{R}$ una constante y sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ dos funciones reales. Se tiene que*

1. $(c)' = 0$;
2. $(x)' = 1$;
3. $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$;
4. $(c\,u)'(x) = c\,u'(x)$;
5. $(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$;
6. $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$, *si* $v(x) \neq 0$;
7. $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$, *si* $v(x) \neq 0$;
8. $(u^v)'(x) = (u^v)(x) \cdot \Big(v'(x)\ln(u(x)) + \frac{v(x)}{u(x)}u'(x)\Big)$, *si* $u(x) > 0$.

Proposición 4.3. *Las fórmulas para las derivadas de las funciones básicas se presentan en la siguiente tabla:*

$f(x)$	$f'(x)$	*Obs.*
x^p	px^{p-1}	$p \neq 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$	$x \in \mathrm{Dom}(\tan)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$	$x \in \mathrm{Dom}(\cot)$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert \neq 1$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert \neq 1$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln(a)$	$a > 0$
$\ln(x)$	$1/x$	$x > 0$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$a > 0,\ x > 0$

Ejemplo 4.4. Usamos las Proposiciones 4.2 y 4.3 para calcular la derivada de

$$f(x) = x^4 \cos(x) - \arctan(x) \ln(x).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(x^4 \cos(x) - \arctan(x) \ln(x)\right)' \\
&= \left(x^4 \cos(x)\right)' - \left(\arctan(x) \ln(x)\right)' \\
&= \left(x^4\right)' \cos(x) + x^4 (\cos(x))' - (\arctan(x))' \ln(x) - \arctan(x) (\ln(x))' \\
&= 4x^3 \cos(x) - x^4 \sin(x) - \frac{1}{1+x^2} \ln(x) - \arctan(x) \cdot \frac{1}{x} \\
&= 4x^3 \cos(x) - x^4 \sin(x) - \frac{\ln(x)}{1+x^2} - \frac{\arctan(x)}{x}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Calculemos la derivada de

$$f(x) = (\sin(x) + e^x)^{x^2+5x-1}.$$

Para aplicar el punto 8 de la Proposición 4.2,

$$(u^v)'(x) = (u^v)(x) \cdot \left(v'(x) \ln(u(x)) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x)\right), \tag{4.4}$$

escribimos

$$f(x) = (u(x))^{v(x)},$$

donde

$$u(x) = \sin(x) + e^x, \qquad v(x) = x^2 + 5x - 1.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} u'(x) &= (\sin(x) + e^x)' \\ &= (\sin(x))' + (e^x)' \\ &= \cos(x) + e^x, \end{aligned} \tag{4.5}$$

y

$$\begin{aligned} v'(x) &= \left(x^2 + 5x - 1\right)' \\ &= (x^2)' + (5x)' + (-1)' \\ &= 2x + 5. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Entonces, reemplazando (4.5) y (4.6) en (4.4) tenemos que

$$f'(x) = (\sin(x)+e^x)^{x^2+5x-1} \cdot \left((2x+5)\ln(\sin(x) + e^x) + \frac{x^2+5x-1}{\sin(x)+e^x}(\cos(x) + e^x) \right).$$

4.2. La Regla de la Cadena

En la siguiente proposición presentamos la **Regla de la Cadena**, fórmula que permite derivar funciones compuestas. La idea es simple: si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ entonces podemos escribir

$$Y = f(g(x)),$$

donde usamos Y en vez de y para recordarnos que "ha cambiado la variable u por la variable x"; entonces

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \tag{4.7}$$

Obsérvese que en el lado derecho de (4.7) uno intuivamente puede pensar que se simplica el factor du para obtener el lado izquierdo.

Proposición 4.4. ***Regla de la Cadena*** *Consideremos las funciones reales*

$$\begin{aligned} g: \quad dom(g) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto u = g(x), \end{aligned} \tag{4.8}$$

y

$$\begin{aligned} f: \quad dom(f) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto y = f(u). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Supongamos que g *es derivable en* $x_0 \in]a, b[\subseteq dom(g)$ *y que* f *es derivable en* $u_0 = g(x_0) \in]c, d[\subseteq dom(f)$. *Entonces,*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0), \tag{4.10}$$

o, denotando $Y = f \circ g$,

$$\frac{dY}{dx}(x_0) = \frac{dy}{du}(u_0) \cdot \frac{du}{dx}(x_0). \tag{4.11}$$

Observación 4.2. **Estrategia para derivar funciones compuestas (ERC).** *En la práctica, cuando derivamos una función* h *que resulta de la composición de dos o más funciones, trabajamos de* ***afuera hacia adentro***, *es decir* "detectamos cual es la **última** operación que se ejecuta para calcular $h(x)$ y empezamos a derivar por la función que le corresponde, respetando el argumento que aparece en su interior. A este resultado multiplicamos por la derivada de la función correspondiente a la **penúltima** operación ejecutada para calcular $h(x)$, respetando el argumento que aparece en su interior. Continuamos este proceso hasta agotar las operaciones".

Ejemplo 4.6. Derivemos la función

$$h(x) = \tan^3(x).$$

Para ello, observemos como trabaja $h(x)$: toma x y cálcula su tangente, para entonces elevar ese resultado al cubo. Ahora aplicamos (ERC) recurriendo a las fórmulas presentadas en la Proposición 4.3:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\tan^3(x)\right)' \\ &= 3\tan^2(x)\cdot(\tan(x))' \\ &= 3\tan^2(x)\cdot\sec^2(x). \end{aligned}$$

Ejemplo 4.7. Derivemos la función

$$h(x) = \arctan(x^7 + 4x^3 + 5).$$

Para ello, observemos como trabaja $h(x)$: toma x y cálcula $x^7 + 4x^3 + 5$, para entonces obtener el arco tangente de este resultado. Ahora aplicamos (ERC) recurriendo a las fórmulas y reglas presentadas en la Proposición 4.3:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\arctan(x^7 + 4x^3 + 5)\right)' \\ &= \frac{1}{1 + (x^7 + 4x^3 + 5)^2}\cdot(x^7 + 4x^3 + 5)' \\ &= \frac{1}{1 + (x^7 + 4x^3 + 5)^2}\cdot(7x^6 + 12x^2) \\ &= \frac{7x^6 + 12x^2}{1 + (x^7 + 4x^3 + 5)^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 4.8. Derivemos la función

$$h(x) = \sin^5(\ln(x)).$$

Para ello, observemos como trabaja $h(x)$: toma x y cálcula su logaritmo; entonces calcula el seno de ese resultado para finalmente elevarlo a la potencia 5. Ahora aplicamos (ERC) recurriendo a las fórmulas presentadas en la Proposición 4.3:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\sin^5(\ln(x))\right)' \\ &= 5\sin^4(\ln(x))\cdot(\sin(\ln(x)))' \\ &= 5\sin^4(\ln(x))\cdot\cos(\ln(x))\cdot(\ln(x))' \\ &= 5\sin^4(\ln(x))\cdot\cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x} \\ &= \frac{5\sin^4(\ln(x))\cdot\cos(\ln(x))}{x}. \end{aligned}$$

Observación 4.3. Una apropiada aplicación de las reglas y fórmulas escritas en las Proposiciones 4.2 y 4.3 más la regla de la cadena permite derivar prácticamente toda función (derivable). Para adquirir esta capacidad el estudiante debe desarrollar tantos ejercicios como sean necesarios hasta que él mismo sienta dominio sobre la técnica. Al final de este capítulo hay un número moderado de ejercicios - para algunos estudiantes puede ser un número apropiado de ejercicios, para otros pueden ser demasiados ejercicios y para otros pueden no ser suficientes, ¡el estudiante debe autoevaluarlo!.

4.3. Derivadas de orden superior

La derivada f' de una función f es también una función. Si f' es a su vez derivable, denotamos

$$f''(x) = \left(f'\right)'(x),$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{d^2 f}{d\,x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\,f}{d\,x}\right),$$

y se dice que $f'' = \frac{d^2 f}{d\,x^2}$ es la **derivada de segundo orden de** f. En tanto que se pueda seguir derivando, la **derivada de orden** $m \in \mathbb{N}$ **de** f estará dada por

$$f^{(m)}(x) = \left(f^{m-1}\right)'(x), \tag{4.12}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{d^m f}{d\,x^m} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{m-1} f}{d\,x^{m-1}}\right). \tag{4.13}$$

Ejemplo 4.9. Hallemos la derivada de segundo orden de la función

$$h(x) = \frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + x.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \left(\frac{\tan^3(x)}{3} + \tan(x) + x\right)' \\
&= \frac{1}{3}(\tan^3(x))' + (\tan(x))' + (x)' \\
&= \tan^2(x) \cdot (\tan(x))' + \sec^2(x) + 1 \\
&= \tan^2(x)\,\sec^2(x) + \sec^2(x) + 1 \\
&= \sec^2(x)\,(\tan^2(x) + 1) + 1 \\
&= \sec^4(x) + 1.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
h''(x) &= (h'(x))' \\
&= (\sec^4(x) + 1)' \\
&= (\cos^{-4}(x) + 1)' \\
&= -4\cos^{-5}(x) \cdot (-\sin(x)) \\
&= 4\sec^4(x)\,\tan(x).
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.10. Calculemos la derivada de segundo orden de la función definida por la fórmula

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - x \cdot \cos(\alpha)}\right).$$

Por la (ERC) tenemos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\arctan\left(\frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - x \cdot \cos(\alpha)}\right)\right]' \\
&= \frac{1}{1 + \left(\frac{x\sin(\alpha)}{1 - x\cos(\alpha)}\right)^2} * \left(\frac{x\sin(\alpha)}{1 - x\cos(\alpha)}\right)'. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Sacamos aparte

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x\sin(\alpha)}{1 - x\cos(\alpha)}\right)' &= \frac{(x\sin(\alpha))'(1 - x\cos(\alpha)) - (x\sin(\alpha))(1 - x\cos(\alpha))'}{(1 - x\cos(\alpha))^2} \\
&= \frac{\sin(\alpha)}{(1 - x\cos(\alpha))^2}. \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Entonces, reemplazando (4.15) en (4.14) y operando se alcanza

$$f'(x) = \frac{\sin(\alpha)}{2(1 - x\cos(\alpha))}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{\sin(\alpha)}{2(1 - x\cos(\alpha))}\right)' \\ &= -\frac{\sin(\alpha)}{2} \cdot \frac{-\cos(\alpha)}{(1 - x\cos(\alpha))^2} \\ &= \frac{\sin(2\alpha)}{4(1 - x\cos(\alpha))^2}. \end{aligned}$$

4.4. La regla de Bernoulli - L'Hôpital

La Regla de Bernoulli - L'Hôpital, (BH), es una herramienta muy útil que permite en muchos casos *levantar* indeterminaciones de la forma $0/0$ y ∞/∞ cuando tanto el numerador como el denominador de $r(x) = f(x)/g(x)$ son funciones diferenciables.

(BH): Sea $r = f/g$ una función diferenciable en $]a, b[\setminus\{x_0\}$. Supongamos que $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y que

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

Si

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a} g(x) = 0,$$

o si

$$\lim_{x \longrightarrow a} |g(x)| = +\infty,$$

entonces,

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observación 4.4. A veces es necesario aplicar sucesivamente más de una vez (BH) para calcular un límite planteado como una una indeterminación $0/0$ o ∞/∞.

Ejemplo 4.11. Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\sin(x))'}{(x)'}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos(x)}{1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.12. Tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(x)'}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.13. Queremos calcular

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^3-3x^2+x+1}{2x^3-2}.$$

Por supuesto, podríamos recurrir al uso de infinitos como lo mencionamos en el capítulo anterior pero preferimos en esta ocasión usar (BH) para ejemplificar su uso. En este caso, es necesaria la aplicación sucesiva de (BH).

$$\begin{aligned}&\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^3-3x^2+x+1}{2x^3-2}\\ &\qquad= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{(x^3-3x^2+x+1)'}{(2x^3-2)'}\\ &\qquad= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{3x^2-6x+1}{6x^2}\\ &\qquad= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{(3x^2-6x+1)'}{(6x^2)'}\\ &\qquad= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{6x-6}{12x}\\ &\qquad= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{(6x-6)'}{(12x)'}\\ &\qquad= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{6}{12}\\ &\qquad= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ejemplo 4.14. Queremos calcular

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}.$$

Observemos que tanto el numerador como el denominador tienden a cero cuando $x\longrightarrow 1$, es decir estamos tratando con una indeterminación $0/0$. Por supuesto, podríamos dividir tanto el numerador como el denominador por el factor $(x-1)$ para intentar levantar la indeterminación pero preferimos usar (BH) para ejmplificar su uso.

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x^3-2x^2-x+2)'}{(x^3-7x+6)'}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 1}\frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7x}\\ &= \frac{3\cdot(1)^2-4\cdot(1)-1}{3\cdot(1)^2-7}\\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4.5. Derivación de una función implícita

A veces la dependencia entre las variables x e y no está dada de manera explícita,

$$y=f(x),$$

sino de manera implícita,

$$F(x,y)=\text{constante}, \tag{4.16}$$

lo cual quiere decir que *posiblemente* no se puede despejar y en términos de x. En este caso, para hallar $y'=\frac{dy}{dx}$ derivamos (4.16) con respecto a x considerando que y es función de x, es decir usamos la regla de la cadena. Como segundo paso, despejamos y' en términos de x y (posiblemente) y.

Observación 4.5. Ahora, si lo que buscamos es $\frac{dx}{dy}$, podemos proceder de manera análoga, es decir derivando (4.18) con respecto a y considerando a x como función de y. Como alternativa, para cuando ya se tiene calculado $\frac{dy}{dx}$, se puede hacer:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}. \tag{4.17}$$

Ejemplo 4.15. Buscamos $y' = \frac{dy}{dx}$ cuando las variables x e y están ligadas por la relación

$$x^5 + y^5 - 5a\,xy = 1, \tag{4.18}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante. Para ello derivamos (4.18):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^5 + y^5 - 5a\,xy\right) &= \frac{d}{dx}(1)\\ 5x^4 + 5y^4 \cdot y' - 5a(y + xy') &= 0,\end{aligned}$$

de donde, despejando y', obtenemos

$$y' = \frac{ay - x^4}{y^4 - ax}.$$

Ahora, si buscamos $\frac{dx}{dy}$, aplicamos (4.17) y obtenemos

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{ay-x^4}{y^4-ax}} = \frac{y^4 - ax}{ay - x^4}.$$

Ejemplo 4.16. Buscamos $x' = \frac{dx}{dy}$ cuando las variables x e y están ligadas por la relación

$$y - \sin(x) - \ln(x^2 - 5x + 4) = 0. \tag{4.19}$$

Una primera estrategia para proceder sería derivar directamente con respecto a y en (4.19), lo cual involucra varias veces la aplicación de la regla de la cadena (tema en el que suele tener dificultades el principiante). Por otro lado, observamos que es más fácil derivar (4.19) con respecto a x, así que optamos por esta vía para entonces aplicar (4.17):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(y - \sin(x) - \ln(x^2 - 5x + 4)\right) &= \frac{d}{dx}(0)\\ \frac{dy}{dx} - \cos(x) - \frac{2x-5}{x^2 - 5x + 4} &= 0,\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) + \frac{2x-5}{x^2-5x+4},$$

y finalmente

$$\frac{dx}{dy} = \left(\cos(x) + \frac{2x-5}{x^2-5x+4}\right)^{-1}.$$

Observación 4.6. **Derivación logarítmica.** *El método de derivación de una función dada implícitamente es una alternativa al punto 8 de la Proposición 4.2, cuando se busca $\frac{dy}{dx}$ y las variables x e y están ligadas por una relación de la forma*

$$y = (u(x))^{v(x)}, \tag{4.20}$$

donde, a su vex, u y v son funciones de x. La nueva estrategia requiere tomar $\ln$ en (4.20) para entonces derivar con respecto a x.

Ejemplo 4.17. Buscamos $\frac{dy}{dx}$ cuando las variables x e y están ligadas por la relación

$$y = (\sin(x))^{x^2-5x+4}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln\left((\sin(x))^{x^2-5x+4}\right) \\ &= (x^2-5x+4)\cdot\ln(\sin(x)). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Entonces, derivando con respecto a x en (4.21):

$$\frac{y'}{y} = (2x-5)\cdot\ln(\sin(x)) + (x^2-5x+4)\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)},$$

así que

$$y' = y\cdot\left[(2x-5)\cdot\ln(\sin(x)) + (x^2-5x+4)\cdot\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right].$$

Ejemplo 4.18. Buscamos $\frac{dy}{dx}$ cuando las variables x e y están ligadas por la relación

$$y = (\arctan(x))^{x^{\sin(x)}}.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \ln(y) &= \ln\left((\arctan(x))^{x^{\sin(x)}}\right) \\ &= x^{\sin(x)}\cdot\ln(\arctan(x)). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Puesto que en (4.22) todavía tenemos el problema de una función eleveda a otra función volvemos a tomar ln:

$$\begin{aligned} \ln(\ln(y)) &= \ln\left(x^{\sin(x)} \cdot \ln(\arctan(x))\right), \\ &= \sin(x) \cdot \ln(x) + \ln(\ln(\arctan(x))). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Entonces, derivando con respecto a x en (4.23):

$$\frac{y'}{y \cdot \ln(y)} = \cos(x) \cdot \ln(x) + \sin(x) \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x) \cdot \ln(\arctan(x))},$$

así que

$$y' = y \cdot \ln(y) \cdot \left[\cos(x) \cdot \ln(x) + \frac{\sin(x)}{x} + \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x) \cdot \ln(\arctan(x))}\right].$$

4.6. Monotonía y Puntos Críticos

Para empezar, consideremos una función real de variable real f cualquiera, no requerimos su derivabilidad. Diremos que f es **creciente**, denotado $f \nearrow$, si se cumple que

$$f(x_1) \leqslant f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f),\ x_1 < x_2.$$

Diremos que f es **estrictamente creciente**, denotado $f \nearrow\nearrow$, si se cumple que

$$f(x_1) < f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f),\ x_1 < x_2.$$

Diremos que f es **decreciente**, denotado $f \searrow$, si se cumple que

$$f(x_1) \geqslant f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f),\ x_1 < x_2.$$

Diremos que f es **estrictamente decreciente**, denotado $f \searrow\searrow$, si se cumple que

$$f(x_1) > f(x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom}(f),\ x_1 < x_2.$$

A una función que es creciente o decreciente se dice que es **monótona**.

FUNCIÓN CRECIENTE

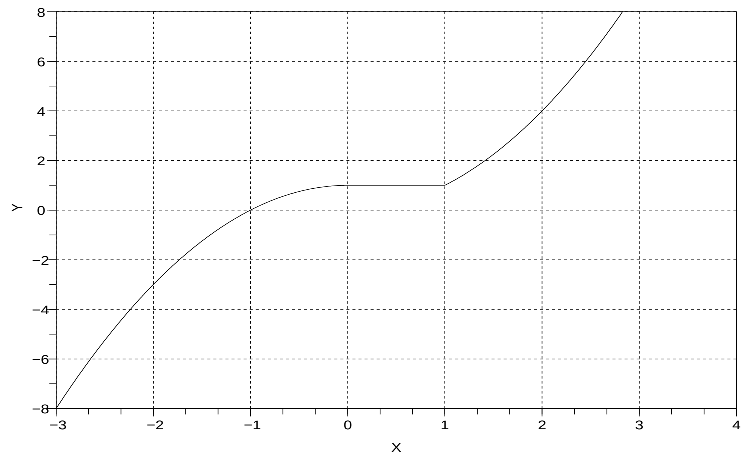


Fig. 60

FUNCIÓN ESTRICTAMENTE CRECIENTE

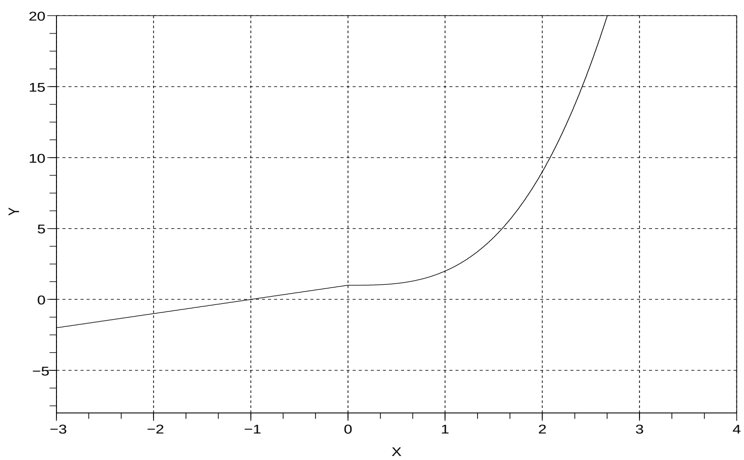


Fig. 61

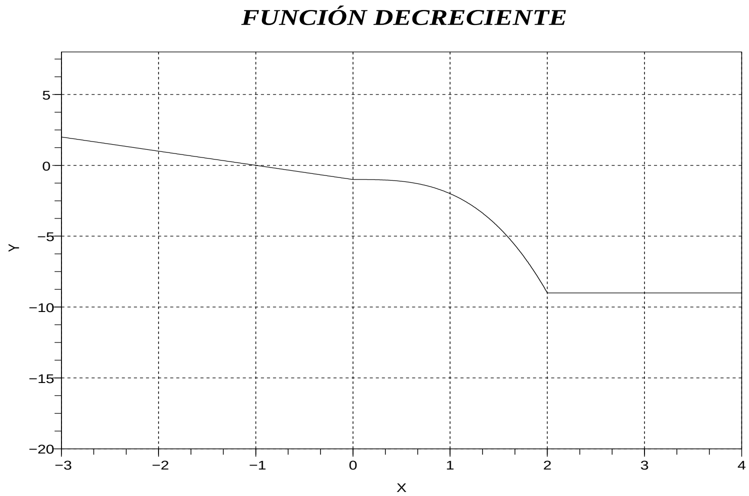


Fig. 62

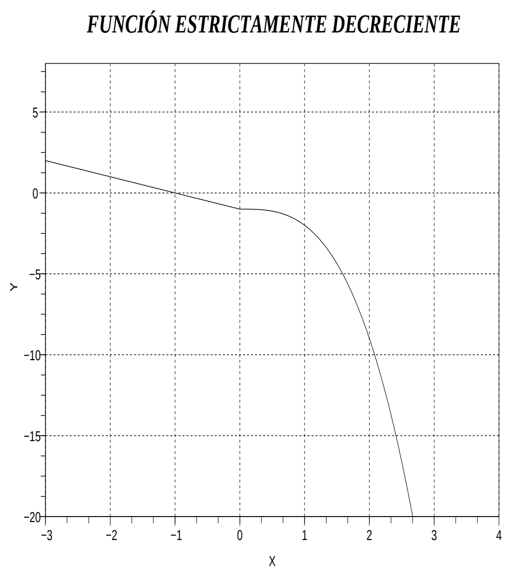


Fig. 63

Para una función, aquellos puntos donde la derivada se anula son importantes tanto para el análisis de monotonía como para el estudio de extremos locales.

Definición 4.2. **Puntos críticos.** *Sea f una función real derivable en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$. Decimos que x_0 es un punto crítico de f si se tiene que $f'(x_0) = 0$. Al conjunto de puntos críticos de f se le denota $K[f]$, es decir,*

$$K[f] = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : \ f'(x) = 0\}.$$

Observación 4.7. Dada una función f, para hallar $K[f]$ hay que resolver la ecuación

$$f'(x) = 0.$$

Proposición 4.5. *Sea f una función derivable en $I \subseteq \mathrm{Dom}(f)$. Entonces, f es creciente en I si y sólo si*

$$f'(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in I. \tag{4.24}$$

Asimismo, f es decreciente en I si y sólo si

$$f'(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in I. \tag{4.25}$$

Observación 4.8. En la proposición anterior, podemos hablar de crecimiento o decrecimiento estrictos en tanto que las desigualdades (4.24) y (4.25) sean también estrictas.

De la proposición anterior se deduce entonces que los puntos críticos de una función muy probablemente son aquellos donde el signo de $f'(x)$ cambia.

Ejemplo 4.19. Consideramos la función determinada por la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

Los puntos crìticos de f son las soluciones de la ecuaciòn

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$$

es decir,
$$K[f] = \{-1,\, 1,\, 2\}.$$
Para conocer donde la función es creciente o decreciente, consideramos los intervalos
$$I_1 =]-\infty,\, -1], \quad I_2 = [-1,\, 1], \quad I_3 = [1,\, 2], \quad I_4 = [2,\, \infty[$$
(obsérvese que son intervalos cerrados) y evaluamos f' en puntos de cada uno de estos intervalos; por ejemplo en los puntos
$$x_1 = -1{,}5 \in I_1, \quad x_2 = 0{,}0 \in I_2, \quad x_3 = 1{,}5 \in I_3, \quad x_4 = 2{,}5 \in I_4.$$
Tenemos que
$$f'(x_1) = -4{,}375 < 0 \in I_1, \quad f'(x_2) = 2{,}0 > 0 \in I_2,$$
$$f'(x_3) = -0{,}625 < 0 \in I_3, \quad f'(x_4) = 2{,}625 > 0.$$
Por tanto, la función f es creciente en
$$I_2 \cup I_4 = [-1,\, 1] \cup [2,\, \infty[,$$
y decreciente en
$$I_1 \cup I_3 =]-\infty,\, -1] \cup [1,\, 2].$$
Ejemplo 4.20. Consideramos la función determinada por la fórmula
$$f(x) = x \cdot \ln(x) - x.$$
Los puntos crìticos de f son las soluciones de la ecuaciòn
$$f'(x) = \ln(x) = 0,$$
es decir,
$$K[f] = \{1\}.$$
Para conocer donde la función es creciente o decreciente, consideramos los intervalos
$$I_1 =]0,\, 1], \quad I_2 = [1,\, +\infty[$$
(obsérvese que son intervalos cerrados) y evaluamos f' en puntos de cada uno de estos intervalos; por ejemplo en los puntos
$$x_1 = 0{,}5 \in I_1, \quad x_2 = 1{,}5 \in I_2.$$

Tenemos que

$$f'(x_1) = -0{,}69314 < 0 \in I_1, \quad f'(x_2) = 0{,}40546 > 0 \in I_2.$$

Por tanto, la función f es decreciente en

$$I_2 = [1, \infty[,$$

y creciente en

$$I_1 =]0, 1].$$

Ejemplo 4.21. Puesto que para la función ln se tiene que

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0, \quad \forall x > 0,$$

es claro que ln no tiene puntos críticos y además es estrictamente creciente en todo su dominio de definición.

Ejemplo 4.22. Puesto que para la función exp se tiene que

$$(e^x)' = e^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

es claro que exp no tiene puntos críticos y además es estrictamente creciente en todo su dominio de definición.

4.7. Convexidad y puntos de inflexión

El concepto de convexidad es muy útil en matemática para determinar en variadas situaciones la existencia de un único mínimo local. Para hablar de convexidad no se requiere en principio la derivabilidad de la función bajo estudio; pero, cuando se cuenta con que la función tiene derivada de segundo orden, el estudio de la convexidad se ve reducido al signo de la segunda derivada.

Definición 4.3. **Convexidad de una función.** *Se dice que una función real ϕ es convexa en $I = [a, b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ si se cumple que*

$$\phi(tx + (1-t)y) \leqslant t\phi(x) + (1-t)\phi(y), \quad \forall x, y \in I, \forall t \in]0; 1[. \tag{4.26}$$

Si en (4.26) la desigualdad cambia de sentido, diremos que ϕ es una función cóncava en I.

Observación 4.9. Si en la definición anterior, la desigualdad es estricta diremos que ϕ es estrictamente convexa. De la misma manera definimos el concepto de concavidad estricta.

Definición 4.4. **Puntos de inflexión** *Sea f una función real y sea $x_0 \in \text{Dom}(f)$. Se dice que x_0 es un punto de inflexión de f si existe un intervalo $]a, b[\subseteq \text{Dom}(f)$, tal que $x_0 \in]a, b[$ y tal que se cumple una de las siguientes condiciones*

a) f *es cóncava en* $]a, x_0]$ *y convexa en* $[x_0, b[$;

b) f *es convexa en* $]a, x_0]$ *y cóncava en* $[x_0, b[$.

Al conjunto de puntos de inflexión de f se le denota por $I[f]$.

Intuitivamente, podemos decir que una función es convexa (respectivamente cóncava) en un intervalo $I = [a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$ cuando su gráfica presenta una abertura hacia arriba (respectivamente hacia abajo).

En las dos gráficas que siguen se presentan dos funciones que no tienen puntos de inflexión; la primera es estrictamente convexa y la segunda estrictamente cóncava.

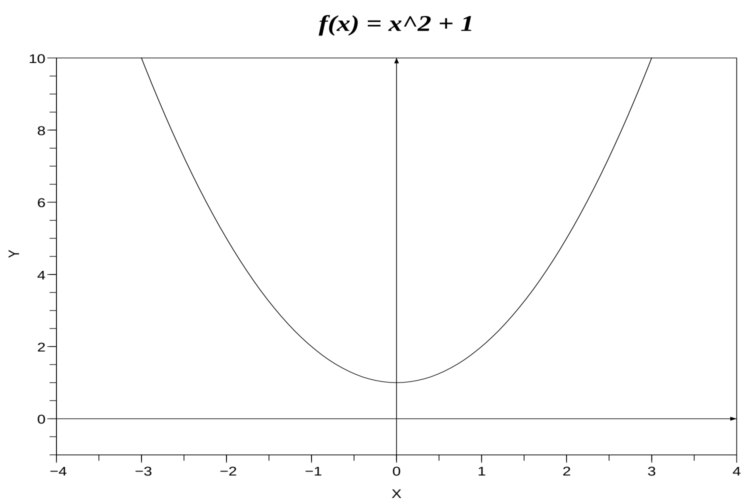


Fig. 64 Convexidad estricta

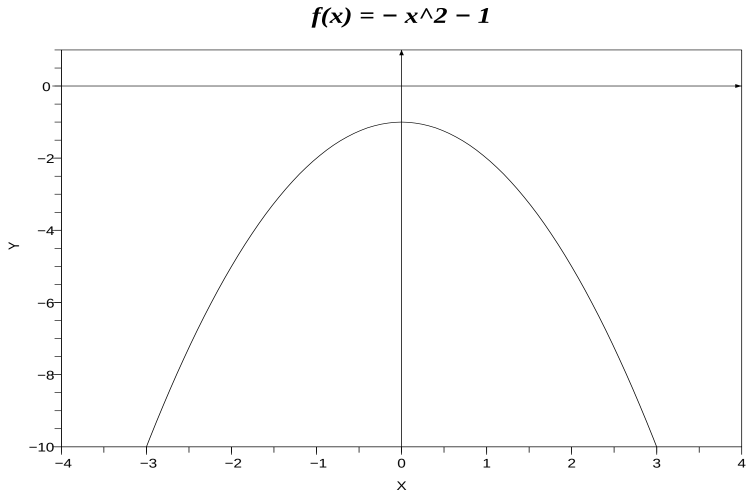


Fig. 65 Concavidad estricta

En las dos gráficas que siguen se presentan dos funciones que no tienen puntos de inflexión; la primera es convexa y la segunda cóncava.

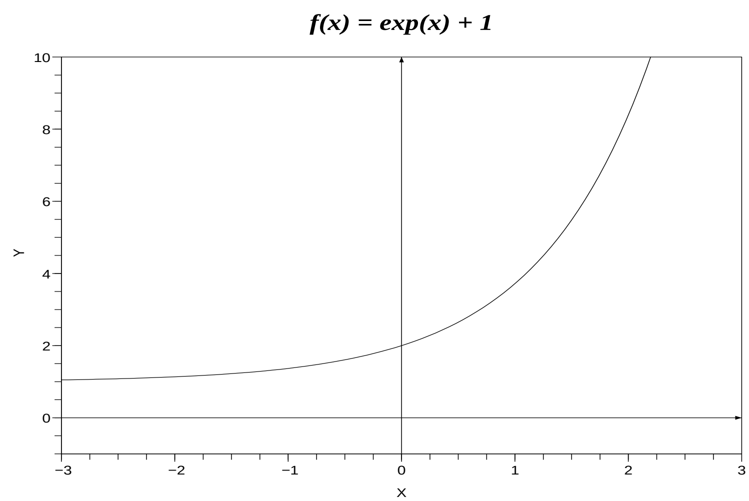


Fig. 66 Convexidad

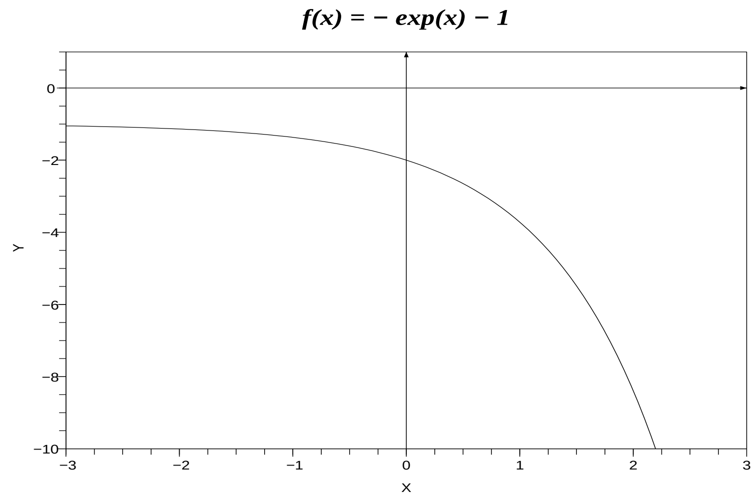


Fig. 67 Concavidad

Ejemplo 4.23. A partir de la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 - 1$$

podemos intuir que es cóncava en $]-\infty; 0]$ y convexa en $[0, \infty[$ así que $x_0 = 0$ es un punto de inflexión de f.

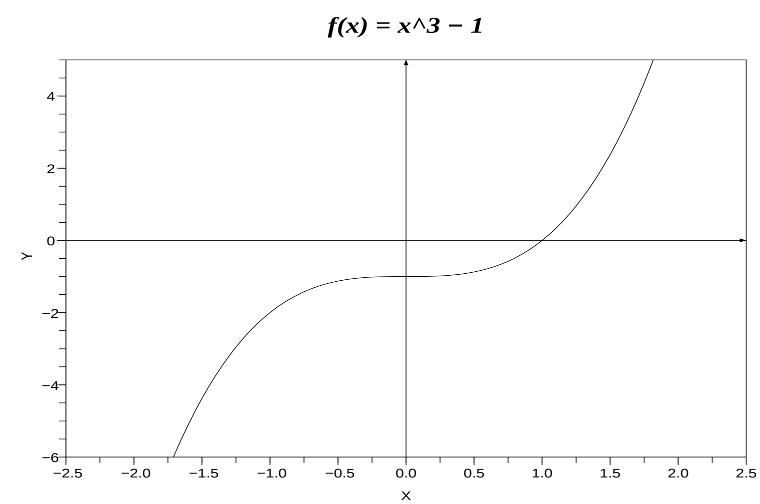


Fig. 68

Ejemplo 4.24. Las funciones pueden cambiar su comportamiento de convexo a cóncavo (o viceversa) varias veces y por tanto pueden tener varios (incluso infinitos) puntos de inflexión. Véanse por ejemplo las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ y $g(x) = \sin(x)$.

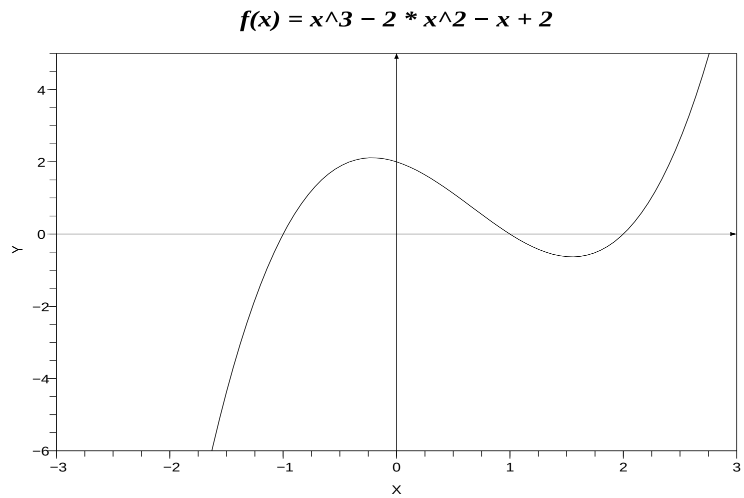


Fig. 69

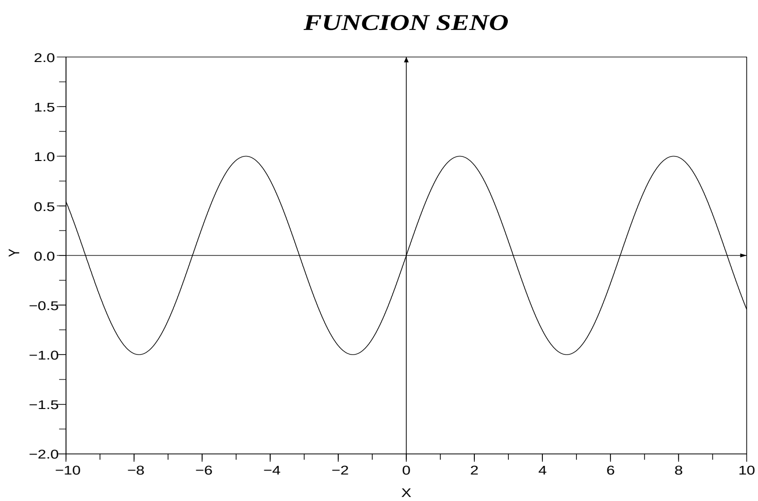


Fig. 70

Para encontrar los puntos de inflexión de una función que tiene derivada de segundo orden es útil la siguiente

Proposición 4.6. *Sea f una función real y sea $x_0 \in]a,b[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$, con $a \neq b$. Si $f''(x_0) = 0$ y existe un $\epsilon > 0$ (probablemente pequeño) tal que una de las relaciones siguiente se cumple*

a) $(f'(x) > 0, \forall x \in]x_0-\epsilon;\, x_0[) \wedge (f'(x) < 0, \forall x \in]x_0;\, x_0+\epsilon])$;

b) $(f'(x) < 0, \forall x \in]x_0-\epsilon;\, x_0[) \wedge (f'(x) > 0, \forall x \in]x_0;\, x_0+\epsilon])$,

entonces x_0 es un punto de inflexión de f.

Ejemplo 4.25. Consideremos la función $f(x) = x^3 - 1$ cuyo gráfico fue presentado en el Ejemplo 4.23 y a partir del cual intuimos que debería haber un punto de inflexión en $x_0 = 0$. Veamos si a través de la proposición anterior confirmamos nuestra intuición y si quizá existen más puntos de inflexión. Tenemos que

$$f''(x) = 6x,$$

así que $f''(0) = 0$. Es bastante claro que

$$f(x) < 0, \quad \forall x < 0,$$

y que

$$f(x) > 0, \quad \forall x > 0,$$

así que por la Proposición 4.6 se tiene que

$$I[f] = \{0\}.$$

Ejemplo 4.26. Consideremos la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ cuyo gráfico fue presentado en el Ejemplo 4.24 y a partir del cual podemos intuir que hay un punto de inflexión en las cercanías de $x = 1$. Tenemos que

$$f''(x) = 6x - 4,$$

así que $f''(2/3) = 0$. Es bastante claro que

$$f(x) < 0, \quad \forall x < 2/3,$$

y que

$$f(x) > 0, \quad \forall x > 2/3,$$

así que por la Proposición 4.6 se tiene que

$$I[f] = \{2/3\}.$$

La siguiente Proposición es también útil.

Proposición 4.7. *Sea f una función real y sea $x_0 \in]a,b[\subseteq \mathrm{Dom}(f)$, con $a \neq b$. Si $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$ entonces x_0 es un punto de inflexión de f.*

Ejemplo 4.27. Consideremos la función $f(x) = \sin(x)$ cuyo gráfico fue presentado en el Ejemplo 4.24 y a partir del cual podemos intuir que deberían haber infinitos puntos de inflexión. Tenemos que

$$f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x),$$

así que

$$f''(k\pi) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora bien, puesto que

$$f'''(k\pi) = \begin{cases} -1, & \text{si } k \text{ es par}, \\ +1, & \text{si } k \text{ es impar}, \end{cases}$$

se sigue por la Proposición 4.7 que

$$I[f] = \{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.8. Extremos de una función

Presentamos en la Sección 4.6 el concepto de punto crítico y dijimos que el cálculo de puntos críticos de una función es una buena herramienta para encontrar los puntos donde localmente se optimiza (minimiza o maximiza) la función. En efecto, como veremos más adelante, un punto crítico es un máximo, un mínimo o un punto de ensilladura.

Definición 4.5. Máximos y Mínimos. *Sea f una función real y sea $x_0 \in \operatorname{Dom}(f)$. Se dice que x_0 es un punto de máximo local de f si existe una región $I \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ tal que*

$$f(x) \leqslant f(x_0), \quad \forall x \in I;$$

en este caso decimos que el valor $f(x_0)$ es un máximo local de f. Diremos que x_0 es un punto de mínimo local de f si existe una región $I \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ tal que

$$f(x) \geqslant f(x_0), \quad \forall x \in I;$$

en este caso decimos que el valor $f(x_0)$ es un mínimo local de f.

Observación 4.10. Si en la definición anterior se tiene que $I = \operatorname{Dom}(f)$, cambiaremos el término local por global.

Observación 4.11. Llamamos (punto de) **extremo** a todo (punto de) máximo o mínimo (ya sea local o global).

Observación 4.12. En las definiciones anteriores se puede cambiar la palabra **local** por **relativo**), y **global** por **absoluto**.

Teorema 4.1. *Supongamos que la primera de las derivadas de f, que **no** se anula en $x_0 \in \operatorname{Dom}(f)$, es de orden n. Entonces,*

1. *Si n es impar, x_0 es un **punto de ensilladura**;*
2. *caso contrario, si n es par, x_0 es un punto de extremo y más aún*
   a) *x_0 es un punto de máximo local si $f^{(n)}(x_0) < 0$;*
   b) *x_0 es un punto de mínimo local si $f^{(n)}(x_0) > 0$.*

Observación 4.13. *En el teorema anterior lo más frecuente es tratar con $n = 2$. Entonces, para encontrar los extremos de una función f se deberá (usualmente)*

1. *Hallar los puntos críticos de f, es decir hallar el conjunto*

$$K(f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : \ f'(x) = 0\}.$$

2. *Para cada $x_0 \in K(f)$, verificar el signo de $f''(x_0)$:*

   a) *x_0 es un punto de máximo local si $f''(x_0) < 0$;*

   b) *x_0 es un punto de mínimo local si $f''(x_0) > 0$.*

Ejemplo 4.28. Consideramos la función determinada por la fórmula

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

Como vimos en el Ejemplo 4.19, los puntos crìticos de f son las soluciones de la ecuaciòn

$$f'(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0,$$

es decir,

$$K[f] = \{-1, 1, 2\}.$$

Para ver de qué tipo son estos puntos críticos tenemos que evaluar

$$f''(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

en tales puntos:

$$f''(-1) = 6{,}0 > 0, \quad f''(1) = -2{,}0 < 0, \quad f''(2) = 3{,}0 > 0.$$

Por tanto, por el Teorema 4.1, tenemos que

1. $f(x_1) = f(-1{,}0) = \frac{-19}{12}$ es un mínimo local de f;
2. $f(x_2) = f(1{,}0) = \frac{13}{12}$ es un máximo local de f;
3. $f(x_3) = f(2{,}0) = \frac{2}{3}$ es un mínimo local de f.

Además, observando el gráfico de f está claro que no tiene máximo global.

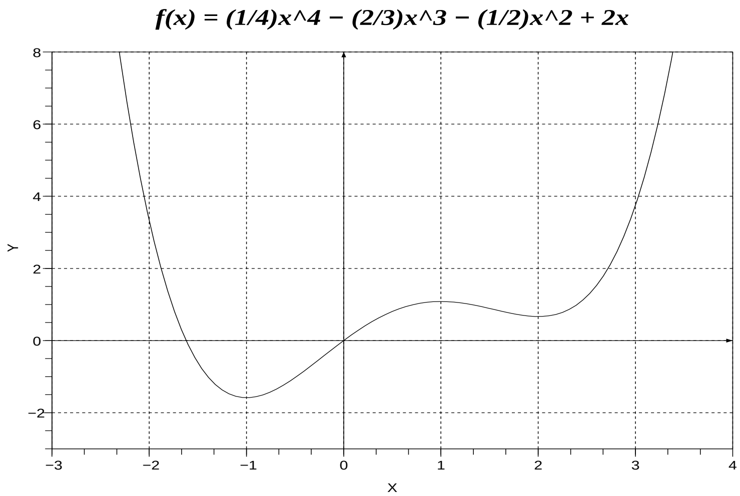


Fig. 71

Ejemplo 4.29. Consideramos la función determinada por la fórmula

$$f(x) = x \cdot \ln(x) - x.$$

Como vimos en el Ejemplo 4.20, los puntos críticos de f son las soluciones de la ecuaciòn

$$f'(x) = \ln(x) = 0,$$

es decir,

$$K[f] = \{1\}.$$

Puesto que al evaluar

$$f''(x) = \frac{1}{x},$$

en $x_1 = 1$ tenemos $f''(1) = 1 > 0$, tenemos por el Teorema 4.1 que $f(x_1) = f(1) = -1$ es un mínimo local de f. Viendo la gráfica de f nos damos cuenta que de hecho es un mínimo global.

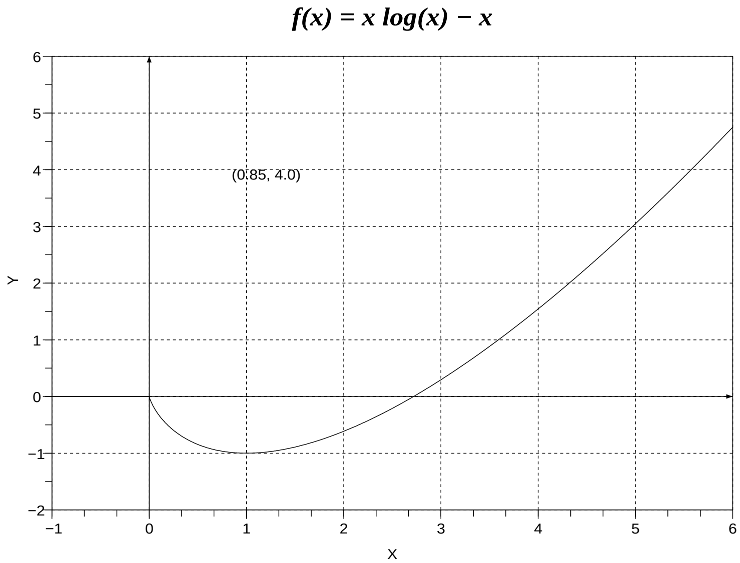


Fig. 72

Ejemplo 4.30. Consideremos la función $f(x) = x^3 - 1$ que fue estudiada parcialmente en los Ejemplos 4.23 y 4.25. Tenemos que

$$f'(x) = 3x^2, \quad f''(x)6x, \quad f'''(x) = 6,$$

así que

$$f'(0) = f''(0) = 0, \quad f'''(0) = 6 \neq 0,$$

y entonces, por el Teorema 4.1, se sigue que $x_1 = 0$ es un punto de ensilladura para f.

Ejemplo 4.31. Consideremos la función determinada por la fórmula

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Los puntos críticos de f son las soluciones de la ecuación

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0,$$

es decir,

$$K[f] = \{-1, 1\}.$$

Evaluando

$$f''(x) = \frac{2x^5 - 4x^3 - 6x}{(1+x^2)^4}$$

en los puntos críticos de f tenemos

$$f''(-1) = \frac{1}{2} > 0, \quad f''(1) = -\frac{1}{2} < 0,$$

así que f tiene un mínimo local en $x_1 = -1$ y un máximo local en $x_2 = 1$.

4.9. Rectas Tangente y Normal

Consideremos una función real f y supongamos que en $x_0 \in \mathrm{Dom}(f)$ se tiene

$$f(x_0) = \alpha, \quad f'(x_0) = \beta.$$

Busquemos en primer lugar la ecuación de la recta tangente T a la gráfica de f en el punto $x = x_0$. Escribimos

$$T(x) = m_1 \cdot x + b_1.$$

Puesto que en el punto x_0 tanto f como T tienen la misma pendiente se sigue que

$$m_1 = f'(x_0) = \beta,$$

y entonces, puesto que $T(x_0) = f(x_0) = \alpha$ se sigue que

$$m_1 \cdot x_0 + b_1 = \alpha,$$

de donde

$$b_1 = \alpha - \beta \cdot x_0.$$

La ecuación de la recta tangente a f en el punto $x = x_0$ está dada entonces por la fórmula

$$T(x) = \beta \cdot (x - x_0) + \alpha.$$

Busquemos ahora la ecuación de la recta normal N a la gráfica de f en el punto $x = x_0$. Para ello debemos suponer adicionalmente que

$$\beta \neq 0.$$

Escribimos

$$N(x) = m_2 \cdot x + b_2.$$

Puesto que en el punto x_0 las gráficas de f y T se cortan ortogonalmente, se sigue que

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\beta},$$

y entonces, puesto que $N(x_0) = f(x_0) = \alpha$ se sigue que

$$m_2 \cdot x_0 + b_2 = \alpha,$$

de donde

$$b_2 = \alpha + \frac{x_0}{\beta}.$$

La ecuación de la recta normal a f en el punto $x = x_0$ está dada entonces por la fórmula

$$N(x) = -\frac{1}{\beta}(x - x_0) + \alpha.$$

4.10. Cálculos aproximados via diferenciales

En su calculadora electrónica encuentra la función exponencial, $\exp(x) = e^x$, ¿cierto? Y quizás al usar esa función, lo mismo que sin, cos, etc., usted está convencido de que usa realmente tal función. Pero, ¿es realmente cierto? No. Su calculadora hace una aproximación *apropiada* del valor e^x para un x introducido por el usuario.[1] Si x es un valor cercano a 0, entonces se puede usar un **polinomio de Taylor / McClaurin** para aproximar e^x:

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k,$$

para una cierta $n \in \mathbb{N}$. En particular, para $n = 1$,

$$e^x \approx 1 + x.$$

Veamos en la siguiente tabla qué tan buena es la aproximación. Para ello definimos como **error cometido**, denotado E, a la distancia entre el *valor real* y el *valor aproximado*.

[1] Aquí la palabra .ªpropiada.ᵉˢ un tanto subjetiva pues depende del contexto del problema bajo estudio. Por poner un ejemplo, un error de 1 milímetro en el diseño de la estructura de un avión puede provocar que este se estrelle pero esa misma distancia será despreciable si lo que se está midiendo es la distancia entre dos estrellas.

x	e^x	$1+x$	E
-1.00000	0.3678794412	0.0000000000	0.3678794412
-0.50000	0.6065306597	0.5000000000	0.1065306597
-0.10000	0.9048374180	0.9000000000	0.0048374180
-0.01000	0.9900498337	0.9900000000	0.0000498337
-0.00100	0.9990004998	0.9990000000	0.0000004998
-0.00010	0.9999000050	0.9999000000	0.0000000049
+0.00000	1.0000000000	1.0000000000	**0.0000000000**
+0.00010	1.0001000050	1.0001000000	0.0000000050
+0.00100	1.0010005000	1.0010000000	0.0000005001
+0.01000	1.0100501670	1.0100000000	0.0000501670
+0.10000	1.1051709180	1.1000000000	0.0051709180
+1.00000	2.7182818280	2.0000000000	0.7182818285
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Como se puede ver en la tabla, la aproximación $1+x$ de e^x es buena cuando los valores de x son más y más cercanos a 0.

El tipo de aproximación que acabamos de presentar es la materia de esta sección. De hecho nuestra maquinaria servirá no solo para la función exponencial sino para toda función derivable en torno a un punto $x = x_0$ (no necesariamente entorno a 0). Para ello necesitamos introducir el concepto de diferencial.

Se llama **diferencial** de una función $y = f(x)$, denotado dy, al producto de su derivada por la diferencial de la variable independiente, i.e.,

$$dy \equiv f'(x) \cdot dx. \tag{4.27}$$

Cuando el valor absoluto del incremento $h = \Delta x$ de la variable independiente x es pequeño, la diferencial dy de la función $y = f(x)$ y el incremento Δy de dicha función son aproximadamente iguales entre sí, i.e.,

$$\Delta y = f(x+h) - f(x) \approx dy, \tag{4.28}$$

de donde,

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h, \tag{4.29}$$

donde x_0 es cualquier punto donde f es derivable.

Ejemplo 4.32. Queremos aproximar via el uso de diferenciales el valor

$$V = (1{,}01)^3 - 2 * (1{,}01)^2 - 4.$$

Para ello ponemos

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4,$$

$$x_0 = 1{,}00, \quad h = 0{,}01.$$

Para usar (4.29) calculamos

$$f'(x) = 3x^2 - 4x,$$

así que

$$\begin{aligned} V &\approx f(1{,}00) + f'(1{,}00) \times (0{,}01) \\ &= -5 + (-1) \times (0{,}01) \\ &= -5{,}01 \end{aligned}$$

Si comparamos esta aproximación con el valor,

$$V = -5{,}009899,$$

tenemos un error

$$E = 0{,}000101.$$

Ejemplo 4.33. Queremos aproximar via el uso de diferenciales el valor

$$V = e^{0{,}01},$$

valor que aparece en la tabla que presentamos hace poco. Para ello ponemos

$$f(x) = e^x,$$

$$x_0 = 0{,}00, \quad h = 0{,}01.$$

Para usar (4.29) calculamos

$$f'(x) = e^x,$$

así que

$$\begin{aligned} V &\approx f(1{,}00) + f'(1{,}00) \times (0{,}01) \\ &= 1 + (1) \times (0{,}01) \\ &= 1{,}01 \end{aligned}$$

Si comparamos esta aproximación con el valor,

$$V = 1{,}010050167,$$

tenemos un error

$$E = 0{,}00005016708416.$$

Ejemplo 4.34. Queremos aproximar via el uso de diferenciales el valor

$$V = \sin(-0{,}02) + \sqrt{0{,}98}.$$

Para ello ponemos

$$f(x) = \sin(x) + \sqrt{1+x},$$
$$x_0 = 0{,}00, \quad h = -0{,}02.$$

Para usar (4.29) calculamos

$$f'(x) = \cos(x) + \frac{1}{2\sqrt{1+x}},$$

así que

$$\begin{array}{rcl} V & \approx & f(0{,}00) + f'(0{,}00) \times (-0{,}02) \\ & = & 1 + (1{,}5) \times (-0{,}02) \\ & = & 0{,}97 \end{array}$$

Si comparamos esta aproximación con el valor,

$$V = 0{,}969950827,$$

tenemos un error

$$E = 0{,}0004917303217$$

4.11. Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1. Usando la definición de derivada calcule $f'(x)$.

1. $f(x) = x^3$;
2. $f(x) = \sqrt{x}$;
3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$;
4. $f(x) = \tan(x)$;
5. $f(x) = x^n$, donde $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 4.2. Calcule la derivada de la función dada por la fórmula $y = f(x)$. Las letras α, β, a, b, etc. representan constantes positivas.

1. $y = \sqrt{\alpha \sin^2(x) + \beta \cos^2(x)}$;
2. $y = \frac{1}{2}\left(\arcsin(x^2)\right) \cdot \operatorname{arc}\cos(x)$;
3. $y = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;
4. $y = x\sqrt{\beta^2 - x^2} + \beta^2 \arcsin\left(\frac{x}{\beta}\right)$;
5. $y = \arcsin(\ln(x))$;
6. $y = e^{\sin^2(x)}$;
7. $y = e^{ax}\cos(bx)$;
8. $y = a^{\sqrt{\cos(x)}} \cdot \sqrt{\cos(x)}$;
9. $y = \ln\left(\cos\left(\frac{x-1}{x}\right)\right)$;
10. $y = \ln(\ln(3 - 2x^3))$;
11. $y = \alpha \ln^{\beta}(ax + b)$;
12. $y = \arctan(\ln(\frac{1}{x}))$;
13. $y = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

Ejercicio 4.3. Calcule la derivada de segundo orden de la función daterminada por la fórmula $y = f(x)$.

1. $y = e^{x^2}$;
2. $y = \sin^2 x$;
3. $y = \ln(\sqrt[3]{1+x^2})$;
4. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$;
5. $y = (1 + x^2) \cdot \arctan(x)$;
6. $y = \frac{g(x)}{g'(x)}$.

Ejercicio 4.4. Calcule la derivada de tercer orden de la función definida por la fórmula

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x \cdot \sin(\alpha)}{1 - x \cdot \cos(\alpha)}\right).$$

Ejercicio 4.5. Calcule la derivada de n-ésimo orden de la función daterminada por la fórmula $y = f(x)$.

1. $y = \sin(x)$;
2. $y = \cos \alpha x$;
3. $y = e^{\beta x}$;
4. $y = \ln(1 + x)$;
5. $y = \frac{1}{1+x}$;
6. $y = \sin^2(x)$;
7. $y = \ln(\alpha x + \beta)$;
8. $y = \frac{1+x}{1-x}$.

Ejercicio 4.6. Halle $\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$.

1. $f(x) = \frac{e^x}{x^5}$, $a = \infty$;
2. $f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt[3]{x}}$, $a = \infty$;

3. $f(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^3}$, $a = 0$;
4. $f(x) = \frac{\ln(\sin(mx))}{\ln(\sin(x))}$, $a = 0$;
5. $f(x) = \ln(x) \cdot \ln(x-1)$, $a = 1^+$;
6. $f(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)}$, $a = 1$;
7. $f(x) = x^x$, $a = 0^+$;
8. $f(x) = x^{\sin(x)}$, $a = 0^+$.

Ejercicio 4.7. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ constantes. Halle $\frac{dx}{dy}$ y $\frac{dy}{dx}$ cuando las variables x e y están ligadas por la relación indicada.

1. $y = 3x + x^3 + a$;
2. $y - \ln(x) + \sin(xy) = a$;
3. $2x - 5y + 10 = b$;
4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
5. $x^3 + x^2y + y^2 = 0$;
6. $\frac{x-y}{x+y} = y^3$;
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;
8. $a\cos^2(x+y) = b$;
9. $xy = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$;
10. $e^y = x + y$;
11. $y = x^{\sin(x)}$;
12. $y = (\cos(x))^{\sin(x)}$;
13. $(x^2 - 5)^{\cos(x)} \cdot e^{-\frac{y}{x}} = a$.

Ejercicio 4.8. Hallar dy/dx y d^2y/dx^2 cuando las variables x e y están ligadas por la fórmula:

1. $y = x^7 + \operatorname{sen} x + \ln(\tan x)$;
2. $y = (\arctan x)^p$, donde $p \neq 0$;
3. $y = (1 + x^2) \cdot e^{\operatorname{sen} x}$;
4. $5y - \operatorname{sen}(xy) + x^2 = 0$;
5. $\ln(y) + \sec(xy) = x$;
6. $\operatorname{arc\,sen} x + \arccos xy = x^2 y^3$.

Ejercicio 4.9. Halle la derivada de orden n de $y = f(x)$ si

1. $y = (ax + b)^n$, donde $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$;
2. $y = \operatorname{sen} x$;
3. $y = \ln(ax + b)$ donde $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$;
4. $y = \frac{a+x}{b-x}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$;

Ejercicio 4.10. Halle $d^n y/dx^n$ en el punto $P = (x_0, y_0)$ si

1. $x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0$, $n = 2$, $P = (1, 1)$;
2. $x^4 - xy + y^4 = 1$, $n = 2$, $P = (0, 1)$;
3. $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $n = 3$, $P = (1, 1)$.

Ejercicio 4.11. La ley del movimiento de un punto es $x = 3t^2 - t + 5$, donde la distancia s se da en centímetros y el tiempo t, en segundos. ¿A qué será igual la velocidad media de este punto durante el intervalo de tiempo comprendido entre $t = 1$ y $t = 2$?

Ejercicio 4.12. Una partícula se mueve siguiendo la ley

$$\vec{P}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I,$$

donde t representa el tiempo, $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo. Aquí, la posición P de la partícula viene dada por las coordenadas (x, y, z) que son (cada una) función del tiempo. Cálcule la velocidad y aceleración de la partícula para el tiempo t, es decir, calcule

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} X'(t) \\ Y'(t) \\ Z'(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} X''(t) \\ Y''(t) \\ Z''(t) \end{pmatrix}$$

1. $X(t) = 2t^2 + 3t + 5$, $Y(t) = -t^2 + 2t + 2$, $Z(t) = 5 - t$, $I = \mathbb{R}$;
2. $X(t) = \ln(t) + 1$, $Y(t) = -t^2 + 2$, $Z(t) = \operatorname{sen}(t)$, $I = \mathbb{R}_+$;
3. $X(t) = \sin(t)$, $Y(t) = \cos(t)$, $Z(t) = t$, $I = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$;
4. $X(t) = a \cdot \sin(t)$, $Y(t) = b \cdot \cos(t)$, $Z(t) = c\cdot$, $I = \mathbb{R}_+$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ son constantes.

Ejercicio 4.13. Grafique la trayectoria de una partícula que se mueve siguiendo la ley $X(t) = \sin(t)$, $Y(t) = \cos(t)$, $Z(t) = t$, $t \in I = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

Ejercicio 4.14. Determinar puntos críticos, extremos (locales y/o globales si es que existen) y regiones de crecimiento/decrecimiento de $y = f(x)$ si

1. $y = x^2 - 2x + 5$;
2. $y = 1/(x + a)$, donde $a > 0$;
3. $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$;
4. $y = \frac{x}{x-2}$;
5. $y = \frac{x-a}{x-b}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$;
6. $y = x \ln x - x$;
7. $y = e^{-x^2}$;
8. $y = \operatorname{arc\,sen}(1 + x)$;
9. $y = \frac{e^x}{x}$;
10. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$;
11. $y = \frac{x^3}{x^2+3}$;

12. $y = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}$;
13. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$;
14. $y = 2\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 4x$;
15. $y = 2\cos\frac{x}{2} + 3\cos x3$;
16. $y = x\ln^2 x$;
17. $y = x^2 e^{-x}$;
18. $x \arctan x$;
19. $y = \frac{x}{1+x^2}$;
20. $y = \operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x$;
21. $y = x^3$ en el segmento $[-1, 3]$;
22. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$
    a) en $[-1, 5]$;
    b) en $[-10, 12]$;

Ejercicio 4.15. Determinar los coeficientes p y q del polinomio

$$y = x^2 + px + q,$$

de forma que $y = 3$ sea un mínimo cuando cuando $x = 1$. Grafique el polinomio.

Ejercicio 4.16. Dada la función $f(x)$ halle las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto x_0.

1. $f(x) = x\ln(x) - x$, $x_0 = 5$;
2. $f(x) = x^2\ln(x^2) - x^2$, $x_0 = 5$;
3. $f(x) = \sin(x)\ln(x) - \cos(\ln(x))$, $x_0 = 10$;
4. $f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 1$.

Ejercicio 4.17. ¿En cuánto aumentará aproximadamente el lado de un cuadrado si su área aumenta de $9m^2$ a $9{,}1m^2$?

Ejercicio 4.18. Hallar el incremento Δy y la diferencial dy de la función $y = f(x)$ para $x = x_0$ si

1. $f(x) = 5x + x^2 - \operatorname{sen} x$, $x_0 = \pi/2$ y $\Delta x = h = 0{,}001$;
2. $f(x) = 2x^{-1/2}$, $x_0 = 9$ y $\Delta x = h = -0{,}01$;
3. $f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$, $x_0 = \pi/4$ y $\Delta x = h = 0{,}03$.

Ejercicio 4.19. ¿En cuánto aumenta, aproximadamente, el volumen de una esfera, si su radio $R = 15cm$ se alarga en $2mm$?

Ejercicio 4.20. Deducir la fórmula aproximada

$$\sqrt[3]{x+\Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

y hallar los valores aproximados de $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$ y $\sqrt[3]{200}$.

Ejercicio 4.21. Hallar el valor aproximado de $f(x_0)$ si

1. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$, $x_0 = 1{,}03$;
2. $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 0{,}2$;
3. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$, $x_0 = 0{,}1$;
4. $f(x) = e^{1-x^2}$, $x_0 = 1{,}05$.

Ejercicio 4.22. Divida un número $a > 0$ en dos sumandos de tal forma que su producto sea el mayor posible.

Ejercicio 4.23. Torcer un trozo de alambre de longitud dada l, de manera que forme un rectángulo cuya área sea la mayor posible.

Ejercicio 4.24. ¿Cuál de los triángulos rectángulos de perímetro dado, igual a $2p$, tiene mayor área?

Ejercicio 4.25. De una hoja de cartón cuadrada, de lado a, hay que hacer una caja rectangular abierta, que tenga la mayor capacidad posible, recortando para ello cuadrados en los ángulos de la hoja y doblando después los salientes de la figura en forma de cruz así obtenida.
Respuesta: El lado del cuadrado que se recorta debe ser igual a $a/6$.

Ejercicio 4.26. Un depósito abierto, de hoja de lata, con fondo cuadrado, debe tener capacidad para v litros. ¿Qué dimensiones debe tener dicho depósito para que en su fabricación se necesite la menor cantidad de hoja de lata?
Respuesta: La altura debe ser dos veces menor que el lado de la base.

Ejercicio 4.27. ¿Cuál de los cilindros de volumen dado tiene menor superficie total?

Ejercicio 4.28. Determine la fórmula para la cantidad $E(x)$ por la cual un número excede a su cuadrado. Haga una gráfica para $E(x)$ cuando $0 \leqslant x \leqslant 1$. Estime el número positivo menor o igual a uno que excede a su cuadrado en la máxima cantidad.

Ejercicio 4.29. Inscribir en una esfera dada un cilindro que tenga la mayor superficie lateral posible.

Ejercicio 4.30. Inscribir, en una elipse dada, un rectángulo de la mayor área posible, que tenga los lados paralelos a los ejes de la propia elipse.

Ejercicio 4.31. Inscribir un rectángulo de la mayor área posible en el segmento de la parábola $2py - x^2 = 0$ cortado por la recta $y = 2a$.

Ejercicio 4.32. En el segmento recto $AB = a$, que une entre sí dos focos luminosos A (de intensidad p) y B (de intensidad q), hallar el punto menos iluminado M (la iluminación es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al foco luminoso).

Ejercicio 4.33. Si tenemos N pilas eléctricas idénticas, con ellas podemos formar baterías por procedimientos distintos, uniendo entre sí grupos de n pilas en serie y, después, los grupos así formados, (en número $\frac{N}{n}$) en paralelo. La intensidad de la corriente que proporciona una batería de este tipo se determina por la fórmula

$$I = \frac{Nn\mathcal{E}}{NR + n^2 r},$$

donde $\mathcal{E}$ es la fuerza electromotriz de una pila, r es su resistencia interna, y R es su resistencia externa. Determinar para que valor de n es mayor la intensidad de la corriente que proporciona la batería.

Ejercicio 4.34. Si x_1, x_2,...,x_n, son los resultados de mediciones igualmente precisas de la magnitud x, su valor más probable, denotado $\bar{x}$, será aquel que minimiza la suma de los cuadrados de los errores

$$\sigma = \sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2.$$

Demostrar que que el valor más probable de x es la media aritmética de los resultados de las mediciones, es decir,

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Ejercicios tipo Evaluación

Funciones reales de variable real

Nivel Básico-Medio

Ejercicio .35. Pruebe que dados $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Ejercicio .36. Grafique la relación

$$f = \left\{ (x,y) \in [-2,2] \times \mathbb{R} : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \ \wedge \ y \geqslant 0 \right\}$$

e indique su dominio y rango. Indique si f es una función.

Ejercicio .37. Grafique la relación $f \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e indique su dominio y rango. Indique si M es una función.

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x^2 + y^2 = 1\}; \tag{30}$$

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \ x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ y \geqslant 0\}; \tag{31}$$

$$f = \{(x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R} : \ x^2 + y^2 = 1 \ \wedge \ y \geqslant 0\}. \tag{32}$$

Ejercicio .38. Grafique la relación

$$f = \left\{ (x,y) \in [0,5] \times \mathbb{R} : \ \frac{x}{2} - y^2 = 1 \ \wedge \ y \geqslant 0 \right\}$$

e indique su dominio y rango. Indique si f es una función.

Ejercicio .39. Halle el dominio de definición de $y = f(x)$ y haga el gráfico de la función f.

$$y = \frac{1}{a^2 - x^2}; \tag{33}$$

$$y = \sqrt{x^2 - 5x + 1}; \tag{34}$$

$$y = \sqrt{-x} + \frac{1}{2 + x}; \tag{35}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 1}}; \tag{36}$$

$$y = \ln(2x - 5) + \frac{1}{x^2 - 7x + 12}; \tag{37}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + x + 2}}; \tag{38}$$

$$y = \ln\left(\frac{3x + 10}{1 + |x|}\right) + \frac{1}{x^2 - x - 2}; \tag{39}$$

donde $a > 0$ es una constante.

Ejercicio .40. Estudie la paridad de la función definida por la fórmula, es decir indique si es par, o impar, o ninguno de los casos anteriores.

$$f(x) = \ln(\frac{1 + x}{1 - x}); \tag{40}$$

$$g(x) = \sqrt{1 + 2x + x^2} - \sqrt{1 - 2x + x^2}; \tag{41}$$

$$h(x) = \sin(x^2); \tag{42}$$

$$(h \cdot g)(x); \tag{43}$$

$$k(x) = \cos(2x); \tag{44}$$

$$(k + h)(x). \tag{45}$$

Ejercicio .41. Estudie la paridad de la función definida por la fórmula, es decir indique si es par, o impar, o ninguno de los casos anteriores.

$$f(x) = \sin(x) \cdot \ln(\frac{1-x^2}{1+x^2}); \tag{46}$$

$$g(x) = x \cdot \tan(x); \tag{47}$$

$$h(x) = \cos(x+\pi) + g(x); \tag{48}$$

$$r(x) = \ln(\frac{5-x}{5+x}); \tag{49}$$

$$s(x) = \sqrt{x^2+bx+c} - \sqrt{x^2-bx+c}; \tag{50}$$

$$t(x) = |\sin(x)|; \tag{51}$$

$$(r \cdot t)(x); \tag{52}$$

$$(r \cdot s)(x); \tag{53}$$

donde $b, c \in \mathbb{R}$ son constantes.

Ejercicio .42. Dadas las siguientes funciones, determine si la función compuesta indicada existe; en caso afirmativo determínela (es decir haga explícito su dominio, codominio y fórmula asociada).

$$\begin{array}{rcll} f: & [-0{,}5;\, 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) = e^x; \\ h: & [0{,}5;\, 7[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & h(x) = e^x; \\ g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & g(x) = |\sin(x)|; \\ k: & [-1; 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & k(x) = 0{,}5 + \arccos(x). \end{array}$$

a) $f \circ g$; **b**) $h \circ g$; **c**) $h \circ k$; **d**) $f \circ k$.

Ejercicio .43. Dadas las siguientes funciones, determine si la función compuesta indicada existe; en caso afirmativo determínela (es decir haga explícito su dominio, codominio y fórmula asociada).

$$
\begin{array}{rccl}
f: & [-0{,}5;\,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & f(x) = e^{x}; \\
h: & [0{,}5;\,7[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & h(x) = e^{x}; \\
g: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & g(x) = |\cos(x)|; \\
k: & [-1;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & k(x) = 0{,}5 + \dfrac{\pi}{2} + \arcsin(x).
\end{array}
$$

a) $f \circ g$; **b**) $h \circ g$; **c**) $h \circ k$; **d**) $f \circ k$.

Ejercicio .44. Dadas las siguientes funciones, determine si la función compuesta indicada existe; en caso afirmativo determínela (es decir haga explícito su dominio, codominio y fórmula asociada).

$$
\begin{array}{rccl}
f: & [-1{,}5;\,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & f(x) = -e^{-x}; \\
h: & [-0{,}5;\,6[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & h(x) = -e^{-x}; \\
g: & [-\frac{\pi}{4};\,0] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & g(x) = \tan(x); \\
k: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto & k(x) = \dfrac{\pi}{2} + \arctan(x).
\end{array}
$$

a) $f \circ g$; **b**) $h \circ g$; **c**) $h \circ k$; **d**) $f \circ k$.

Ejercicio .45. Dada la fórmula $y = f(x)$, use la regla del máximo dominio para determinar la función f. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de f. Cuando sea posible determine la función inversa f^{-1}.

$$y = \ln(x^5); \tag{54}$$
$$y = |\sin(x)|; \tag{55}$$
$$y = \ln(x^3); \tag{56}$$
$$y = e^{-x^2}; \tag{57}$$
$$y = \sqrt{x} + x^2. \tag{58}$$

Ejercicio .46. Estudie la inyectividad y sobreyectividad de la función $f : I \longrightarrow J$, donde tanto I como J son subconjuntos de $\mathbb{R}$. Cuando sea posible determine la función inversa f^{-1}.

$$y = e^{-x^2}, \quad I = [0; +\infty[, \quad J =]0, 1]; \tag{59}$$

$$y = \sin(x), \quad I = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}], \quad J = [-1; 2]. \tag{60}$$

Ejercicio .47. Dada la fórmula $f(x)$, halle el conjunto

$$\mathcal{Z}[f] = \{x \in \mathbb{R} : \ f(x) = 0\}.$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 3); \tag{61}$$

$$f(x) = \ln(2\ln(x)); \tag{62}$$

$$f(x) = \ln(x^2 - 7x + 13); \tag{63}$$

$$f(x) = |-1 + \ln(x^2)|. \tag{64}$$

Ejercicio .48. Dada la fórmula $f(x)$ y dada la región $I \subseteq \mathbb{R}$, halle el conjunto

$$\mathcal{Z}_I[f] = \{x \in I : \ f(x) = 0\}.$$

$$f(x) = \ln(-x^2 + x + 3), \quad I = [0; +\infty[; \tag{65}$$

$$f(x) = |+1 - \ln(x^2 - 2)|, \quad I = \mathbb{R}. \tag{66}$$

Ejercicio .49. Sabiendo que $\tan X = \alpha > 0$, calcule las demás razones trigonométricas de X sabiendo que X es un ángulo del a) primer cuadrante, b) tercer cuadrante.

Ejercicio .50. Sabiendo que $\cot X = \alpha > 0$, calcule las demás razones trigonométricas de X sabiendo que X es un ángulo del tercer cuadrante.

Ejercicio .51. Sabiendo que $\sec X = \alpha > 0$, calcule las demás razones trigonométricas de X sabiendo que X es un ángulo del cuarto cuadrante.

Ejercicio .52. Un triángulo rectángulo ABC tiene perímetro igual a $2p$. Escriba la Superficie del triángulo en términos de la hipotenusa c.

Ejercicio .53. Un triángulo ABC tiene perímetro igual a $2p$. Si se sabe que

$$\overline{AB} = c, \qquad \overline{AC} = \overline{BC} = x,$$

escriba la superficie del triángulo como una función de x.

Ejercicio .54. Verifique la siguiente identidad trigonométrica

$$\tan^2(x) = \sec(x) \cdot (1 - \cos(x)) \cdot (1 + \sec(x)), \quad \forall x \in \mathrm{Dom}(\sec).$$

Ejercicio .55. Verifique la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

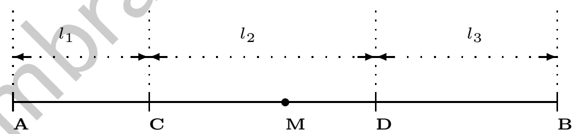
Ejercicio .56. Verifique la siguiente identidad trigonométrica

$$\frac{1 - \csc^2(x)}{\csc^2(x)} = \frac{-1}{\sec^2(x)},$$

para todo $x \in \mathrm{dom}(\sec) \cap \mathrm{dom}(\csc)$ tal que $\csc(x) \neq 0 \wedge \sec(x) \neq 0$.

Nivel Medio-Superior

Ejercicio .57. Las densidades lineales de una barra $AB = l$ en sus porciones $AC = l_1$, $CD = l_2$ y $CB = l_3$ son respectivamente iguales a q_1, q_2 y q_3. Expresar la masa de una porción variable $AM = x$ de esta misma barra, como función de x.



Indicación.- La densidad lineal refiere a la masa por unidad de longitud.
Respuesta:

$$m = \begin{cases} q_1 x, & \text{si } x \in [0, l_1], \\ q_1 l_1 + q_2(x - l_1), & \text{si } x \in (l_1, l_1 + l_2], \\ q_1 l_1 + q_2 l_2 + q_3(x - l_1 - l_2), & \text{si } x \in (l_1 + l_2, l]. \end{cases}$$

Ejercicio .58. Verifique la siguiente identidad trigonométrica

$$\sin(4x) = 8\sin(x)\cos^3(x) - 4\sin(x)\cos(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio .59. Halle el dominio de definición de $y = f(x)$ y haga el gráfico de f.

$$y = \ln(\sin(x)), \quad \text{si } x \in [-2\pi, 2\pi]; \tag{67}$$
$$y = \ln(|x^2 + x - 2| - |x - 1|). \tag{68}$$

Ejercicio .60. Halle el dominio de definición de $y = f(x)$ y haga el gráfico de f.

$$y = \ln(x^3 - 2x^2 - x + 2); \tag{69}$$

$$y = \ln(|x-2| - |x-1| + |x-3|). \tag{70}$$

Ejercicio .61. Queremos calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles, A y B. Desde dos puntos accesibles C y D tomamos las siguientes medidas $\overline{CD} = x$, $\widehat{ADB} = \frac{5}{36}\pi$, $\widehat{ACB} = \frac{8}{45}\pi$, $\widehat{ACD} = \frac{23}{90}\pi$ y $\widehat{BDC} = \frac{2}{9}\pi$. Calcular la distancia entre A y B en términos de x.

Ejercicio .62. Para un volumen dado, halle la superficie total de un cilindroen términos del radio de las tapas.

Ejercicio .63. Dos circunferencias son tangentes exteriormente y sus radios miden respectivamente R y r con $R > r$. Sea α la mitad del ángulo que forman las líneas tangentes comunes (a las circunferencias). Cálcule todas las funciones trigonométricas de α.

Límites y continuidad

Nivel Básico-Medio

Ejercicio .64. Calcule el límite indicado

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2x^2+1}{x^3-5x^2-2x+2}\right)^x; \tag{71}$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right)^x; \tag{72}$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\ln(x)}; \tag{73}$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-2x^2+1}{x^3-x^2-x+2}\right)^x; \tag{74}$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-2x^2+1}{x^3-2x^2-x+2}\right)^x; \tag{75}$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-2x^2+1}{x^3-3x^2-x+2}\right)^{x^2}. \tag{76}$$

Ejercicio .65. Calcule el límite indicado

$$L = \lim_{x\to 1} [1 + 2\sin(x-1)]^{\frac{\cos(x-1)}{x-1}}; \tag{77}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \left[1 + \ln(1+x^2)\right]^{\frac{\cos(\pi-x)}{x^2}}; \tag{78}$$

$$L = \lim_{x\to 0} [1 - \arctan(e^x-1)]^{\frac{1}{\ln(1+2\sin(x))}}. \tag{79}$$

Ejercicio .66. Calcule el límite indicado

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3+\ln(x)}{x^3-5x^2-\ln(x)+2}\right)^x; \tag{80}$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+e^x+\ln(x)}{2e^x+\ln(x)}\right)^x; \tag{81}$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^3-2x^2+1)}{\ln(3x^2-x+2)}. \tag{82}$$

Ejercicio .67. Calcule el límite indicado

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^4 - 2x^3 + x}{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1} \right)^x ; \qquad (83)$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^4 - 3x^3 - x^2 + 2} \right)^{x^2} ; \qquad (84)$$

$$L = \lim_{x\to -2} [1 - 2\arctan(x+2)]^{\frac{3}{\ln(1+2\sin(x+2))}} ; \qquad (85)$$

$$L = \lim_{x\to 0} \left[1 + \ln(1+\sin(x^3))\right]^{\frac{-3}{x^3}} ; \qquad (86)$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^{10} + \ln(x)}{2x^{10} - 5x^2 - \ln(x) + 2} \right)^x ; \qquad (87)$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 3e^x + \ln(x)}{4e^x + \ln(x)} \right)^x ; \qquad (88)$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^p - 2x^2 + 1)}{\ln(3x^q - x + 2)}, \quad p \in]2;\infty[,\ q \in]1;\infty[. \qquad (89)$$

Ejercicio .68. Calcule el límite indicado

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^4 - 2x^3 + x}{3x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1} \right)^x ; \qquad (90)$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - 2x^2 + 1}{x^3 - 3x^2 - x + 2} \right)^x ; \qquad (91)$$

$$L = \lim_{x\to -2} [1 - 3\sin(x+2)]^{\frac{3}{\ln(1+5\arctan(x+2))}} ; \qquad (92)$$

$$L = \lim_{x\to 0} \left[e^{\sin(x^3)}\right]^{\frac{-3}{x^3}} ; \qquad (93)$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^3 + \ln(x)}{x^3 - 5x - \ln(x) + 2} \right)^x ; \qquad (94)$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 5e^{2x} + \ln(x)}{7e^{2x} + \ln(x)} \right)^x ; \qquad (95)$$

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^p - 2x^2 + 1)}{\ln(3x^q + x^2 + 2)}, \quad p \in]2;\infty[,\ q \in]1;2[. \qquad (96)$$

Ejercicio .69. Dada la función definida por la fórmula $f(x)$, analice su continuidad, es decir, halle el conjunto

$$C[f] = \{x_0 \in \mathrm{dom}(f) :\ f \text{ es continua en } x_0\}.$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(2\sin(x))}{3\tan(e^x-1)}, & \text{si } x\in[-1;1]\setminus\{0\},\\ \frac{2}{3}, & \text{si } x=0;\end{cases} \tag{97}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+5\sin(x))}{3\arctan(e^{2x}-1)}, & \text{si } x\in[-0{,}1;1{,}0]\setminus\{0\},\\ \frac{2}{3}, & \text{si } x=0;\end{cases} \tag{98}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+5\sin(x-1))}{3\arctan(e^{2(x-1)}-1)}, & \text{si } x\in[0{,}9;2{,}0]\setminus\{1\},\\ \frac{5}{6}, & \text{si } x=1;\end{cases} \tag{99}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\{1\},\\ 4, & \text{si } x=1;\end{cases} \tag{100}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\},\\ -\frac{5}{2}, & \text{si } x=2.\end{cases} \tag{101}$$

Ejercicio .70. Dada la función definida por la fórmula $f(x)$, analice su continuidad, es decir, halle el conjunto

$$C[f]=\{x_0\in\operatorname{dom}(f):\ f \text{ es continua en } x_0\}.$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\arctan(3\sin(x))}{3\tan(e^x-1)}, & \text{si } x\in[-1;1]\setminus\{0\},\\ \frac{2}{3}, & \text{si } x=0;\end{cases} \tag{102}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+3\sin(x-1))}{3\arctan(e^{2(x-1)}-1)}, & \text{si } x\in[0{,}9;2{,}0]\setminus\{1\},\\ 0, & \text{si } x=1;\end{cases} \tag{103}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2x^2+2x-12}{2x^2-12x+16}, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\},\\ -\frac{5}{2}, & \text{si } x=2.\end{cases} \tag{104}$$

Ejercicio .71. Dada la función definida por la fórmula $f(x)$, analice su continuidad, es decir, halle el conjunto

$$C[f]=\{x_0\in\operatorname{dom}(f):\ f \text{ es continua en } x_0\}.$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin(5\sin(x))}{5\arcsin(e^x-1)}, & \text{si } x\in[-1;1]\setminus\{0\},\\ \frac{2}{3}, & \text{si } x=0;\end{cases} \tag{105}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+6\sin(x-1))}{7\arctan(e^{2(x-1)}-1)}, & \text{si } x\in[0{,}9;2{,}0]\setminus\{1\},\\ \frac{3}{7}, & \text{si } x=1;\end{cases} \tag{106}$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+x-6}{x^2-x-2}, & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\},\\ -\frac{9}{2}, & \text{si } x=2.\end{cases} \tag{107}$$

Nivel Medio-Superior

Ejercicio .72. Dada la función definida por la fórmula $f(x)$, analice su continuidad, es decir, halle el conjunto

$$C[f] = \{x_0 \in \operatorname{dom}(f) :\ f \text{ es continua en } x_0\}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-8x^2+20x-16}, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}, \\ -\frac{5}{2}, & \text{si } x = 2; \end{cases} \tag{108}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3\sin(x)}-e^{\arctan(2x)}}{5\arcsin(e^x-1)}, & \text{si } x \in [-0{,}5; 0{,}0[, \\ \frac{5}{6}, & \text{si } x = 0; \\ \frac{3\ln(1+2x^2)}{10\ln(1+3x^2)}, & \text{si } x \in]0{,}0; 0{,}5[; \end{cases} \tag{109}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3\sin(x-1)}-e^{\arctan(2(x-1))}}{5\arcsin(e^{(x-1)}-1)}, & \text{si } x \in [0{,}5; 1{,}0[, \\ \frac{1}{5}, & \text{si } x = 1; \\ \frac{3\ln(1+2(x-1)^2)}{10\ln(1+3(x-1)^2)}, & \text{si } x \in]1{,}0; 1{,}5[. \end{cases} \tag{110}$$

Ejercicio .73. Dada la función definida por la fórmula $f(x)$, analice su continuidad, es decir, halle el conjunto

$$C[f] = \{x_0 \in \operatorname{dom}(f) :\ f \text{ es continua en } x_0\}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3\sin(x)}-e^{\arctan(2x)}}{5\arcsin(e^x-1)}, & \text{si } x \in [-0{,}5; 0{,}0[, \\ \frac{5}{6}, & \text{si } x = 0; \\ \frac{3\ln(1+2x^2)}{10\ln(1+3x^2)}, & \text{si } x \in]0{,}0; 0{,}5[; \end{cases} \tag{111}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3\sin(x-1)}-e^{\arctan(2(x-1))}}{5\arcsin(e^{(x-1)}-1)}, & \text{si } x \in [0{,}5; 1{,}0[, \\ \frac{1}{5}, & \text{si } x = 1; \\ \frac{3\ln(1+2(x-1)^2)}{10\ln(1+3(x-1)^2)}, & \text{si } x \in]1{,}0; 1{,}5[. \end{cases} \tag{112}$$

Ejercicio .74. Dada la función definida por la fórmula $f(x)$, analice su continuidad, es decir, halle el conjunto

$$C[f] = \{x_0 \in \operatorname{dom}(f) :\ f \text{ es continua en } x_0\}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3\ln(1+x)} - e^{\sin(2x)}}{\arcsin(\ln(1+5x))}, & \text{si } x \in [-0{,}5; 0{,}0[, \\ \frac{1}{5}, & \text{si } x = 0; \\ \frac{3\ln(1+4x^2)}{10\ln(1+3x^2)}, & \text{si } x \in]0{,}0; 0{,}5[; \end{cases} \tag{113}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3\sin(x-1)} - e^{\arctan(2(x-1))}}{5\arcsin(e^{(x-1)}-1)}, & \text{si } x \in [0{,}5; 1{,}0[, \\ \frac{2}{5}, & \text{si } x = 1; \\ \frac{3\ln(1+2(x-1)^2)}{10\ln(1+3(x-1)^2)}, & \text{si } x \in]1{,}0; 1{,}5[. \end{cases} \tag{114}$$

Ejercicio .75. Calcule el límite indicado

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{5^{x^2} - 2^{x^2}}{\sin(x^2)}; \tag{115}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x^3)} - \sqrt{1-\ln(1+x^3)}}{\arctan(e^{x^3}-1)}; \tag{116}$$

$$L = \lim_{x\to 1} \left(\cos(\sin(e^{x-1}-1))\right)^{1/\arctan^2(x-1)}. \tag{117}$$

Ejercicio .76. Calcule el límite indicado

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{5^{x^2} - 2^{x^2}}{\sin(x^2)}; \tag{118}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin(x^3)} - \sqrt{1-\ln(1+x^3)}}{\arctan(e^{x^3}-1)}; \tag{119}$$

$$L = \lim_{x\to 1} \left(\cos(\sin(e^{x-1}-1))\right)^{1/\arctan^2(x-1)}. \tag{120}$$

Ejercicio .77. Calcule el límite indicado

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{5^{\sin(x^2)} - 2^{x^2}}{\ln(1+\arctan(x^2))}; \tag{121}$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\arcsin^5(x)} - \sqrt{1-\ln^5(1+x)}}{\sin(e^{x^5}-1)}; \tag{122}$$

$$L = \lim_{x\to -1} \left(\cos(\arcsin(e^{x+1}-1))\right)^{1/\tan^2(x+1)}. \tag{123}$$

La derivada y sus aplicaciones

Nivel Básico-Medio

Ejercicio .78. Dada la función $f(x)$ halle las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de f en el punto x_0.

$$f(x) = 2x^2 \cdot \ln(x^2) - 2x^2, \quad x_0 = 5; \tag{124}$$
$$f(x) = \sin(x)\ln(x) - \cos(\ln(x)), \quad x_0 = 11; \tag{125}$$
$$f(x) = e^{x^4}, \quad x_0 = 1. \tag{126}$$

Ejercicio .79. Hallar dy/dx y dx/dy cuando las variables x e y están ligadas por la fórmula:

$$\sin(y) = x^7 + \operatorname{sen} x + \ln(\tan x); \tag{127}$$
$$\ln(y) = (\arctan x)^p, \quad p \neq 0; \tag{128}$$
$$y^2 - 5y - (1 + x^2) \cdot e^{\operatorname{sen} x} = 1; \tag{129}$$
$$5y - \operatorname{sen}(xy) + x^3 = 0; \tag{130}$$
$$e^{-y^2} + \tan(\ln(1 + x^2)) = x; \tag{131}$$
$$\operatorname{arc\,sen} x + \operatorname{arc\,cos}(xy) = x^2 \ln(x) + \sin(x^2). \tag{132}$$

Ejercicio .80. Dada la función determinada por la fórmula $y = f(x)$, analícela, es decir, encuentre dominio de definición, puntos críticos (clasificándolos por puntos de máximo, mínimo y de ensilladura), intervalos de monotonía, puntos de inflexión, intervalos de convexidad - concavidad. En base a la información obtenida, haga un bosquejo de la gráfica de la función.

$$y = 1 - 4x - x^4; \tag{133}$$
$$y = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x; \tag{134}$$
$$y = x^2(x - 3); \tag{135}$$
$$y = \frac{x}{x - 2}; \tag{136}$$
$$y = \frac{(x + 1)}{(x - 1)^2}; \tag{137}$$
$$y = \frac{(x - 3)^2}{(x^2 - 6x - 16)^2}. \tag{138}$$

Ejercicio .81. Dada la función determinada por la fórmula $y = f(x)$, analícela, es decir, encuentre dominio de definición, puntos críticos (clasificándolos por puntos de máximo, mínimo y de ensilladura), intervalos de monotonía, puntos de inflexión, intervalos de convexidad - concavidad. En base a la información obtenida, haga un bosquejo de la gráfica de la función.

$$y = (x-3)\sqrt{x}; \tag{139}$$
$$y = (x-4)\sqrt{x+1}; \tag{140}$$
$$y = \arcsin(x+1); \tag{141}$$
$$y = 2 \cdot e^{x^2-4x}; \tag{142}$$
$$y = e^{-x^2}; \tag{143}$$
$$y = x \cdot e^{-x}. \tag{144}$$

Ejercicio .82. Dada la función determinada por la fórmula $y = f(x)$, analícela, es decir, encuentre dominio de definición, puntos críticos (clasificándolos por puntos de máximo, mínimo y de ensilladura), intervalos de monotonía, puntos de inflexión, intervalos de convexidad - concavidad. En base a la información obtenida, haga un bosquejo de la gráfica de la función.

$$y = (x-1)^2 \cdot e^{-x}; \tag{145}$$
$$y = \frac{4}{\sqrt{x^2+8}}; \tag{146}$$
$$y = -1 + x - \ln(1+x); \tag{147}$$
$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}; \tag{148}$$
$$y = (2+x^2) \cdot e^{-x^2}; \tag{149}$$
$$y = \frac{1}{x^2-1} + \ln(x^2-1). \tag{150}$$

Nivel Medio-Superior

Ejercicio .83. Hallar dy/dx, dx/dy y d^2y/dx^2 cuando las variables x e y están ligadas por la fórmula:

$$\tan(\ln(y)) = x^p y + \operatorname{sen}(x^q) \cdot \ln(x), \quad p, q > 0; \tag{151}$$
$$\ln(\sin(y^2 - 5y + 1)) = (\arctan(xy))^p, \quad p \neq 0; \tag{152}$$
$$y^2 - 5y - (1+x^2) \cdot e^{\operatorname{sen} x} = 1; \tag{153}$$
$$5\ln(y) - \operatorname{sen}(xy) + y \cdot x^3 \cdot \ln(x^2 - 5x) = 0. \tag{154}$$

Ejercicio .84. Dada la función determinada por la fórmula $y = f(x)$, analícela, es decir, encuentre dominio de definición, puntos críticos (clasificándolos por puntos de máximo, mínimo y de ensilladura), intervalos de monotonía, puntos de inflexión, intervalos de convexidad - concavidad. En base a la información obtenida, haga un bosquejo de la gráfica de la función.

$$y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x; \tag{155}$$
$$y = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 2x; \tag{156}$$
$$y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}; \tag{157}$$
$$y = \frac{x}{5} - \sqrt[5]{x}; \tag{158}$$
$$y = x \cdot \ln(\sin(x)); \tag{159}$$
$$y = \frac{e^x}{x}. \tag{160}$$

Ejercicio .85. Dada la función determinada por la fórmula $y = f(x)$, analícela, es decir, encuentre dominio de definición, puntos críticos (clasificándolos por puntos de máximo, mínimo y de ensilladura), intervalos de monotonía, puntos de inflexión, intervalos de convexidad - concavidad. En base a la información obtenida, haga un bosquejo de la gráfica de la función.

$$y = \sin(x) \cdot e^x, \quad x \geqslant 0; \tag{161}$$
$$y = \sin(x) \cdot e^{-x}, \quad x \geqslant 0; \tag{162}$$
$$y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}; \tag{163}$$
$$y = x \cdot \ln^2(x); \tag{164}$$
$$y = (a + \frac{x^2}{a})e^{x/a}, \quad a > 0; \tag{165}$$
$$y = x + \sin(x); \tag{166}$$
$$y = \ln(\sin(x)); \tag{167}$$
$$y = \frac{1}{x^2 - a} + \ln(x^2 - a), \quad a > 0; \tag{168}$$
$$y = \frac{1}{\ln(x)} + \ln(\ln(x)); \tag{169}$$
$$y = x^x; \tag{170}$$
$$y = x^{1/x}. \tag{171}$$

Bibliografía

[1] T. M. Apostol, *Calculus. Vol. I: One-variable calculus, with an introduction to linear algebra*, Second edition, Blaisdell Publishing Co. Ginn and Co., Waltham, Mass.-Toronto, Ont.-London, 1967.

[2] G. S. Baranenkov, B. Demidovich, V. A. Efimenko, S. M. Kogan, G. Lunts, E. Porshneva, E. Sycheva, S. V. Frolov, R. Shostak, and A. Yanpolsky, *Problemas y ejercicios de Análisis Matemático*, Editorial Mir, Moscú, 1977.

[3] R. Barnett, M. Ziegler, and K. Byleen, *Precálculo: Funciones y Gráficas*, McGraw-Hill/Interamericana Editores, S.A., México, 2000.

[4] G. Fuller and D. Tarwater, *Geometría Analítica*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

[5] G. Gil, *La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco de evaluación.*, OCDE. Ministerio de Educación y Cultura, España, 2000.

[6] G. Hawes, *Evaluación de competencias en la Educación Superior*, IIDE. Universidad de Talca, Talca, 2005.

[7] E. Purcell, S. Rigdon, and D. Varberg, *Cálculo*, Pearson Educación, México, 2001.

[8] K. A. Ross, *Elementary Analysis: The Theory of Calculus*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[9] S. Tobón, *Competencias, calidad y educación superior*, Cooperativa Editorial Magisterio, 2006.

[10] Wikibook-Users, *Trigonometry (Wikibook), 2006*, http://en.wikibooks.org/wiki/Trigonometry.