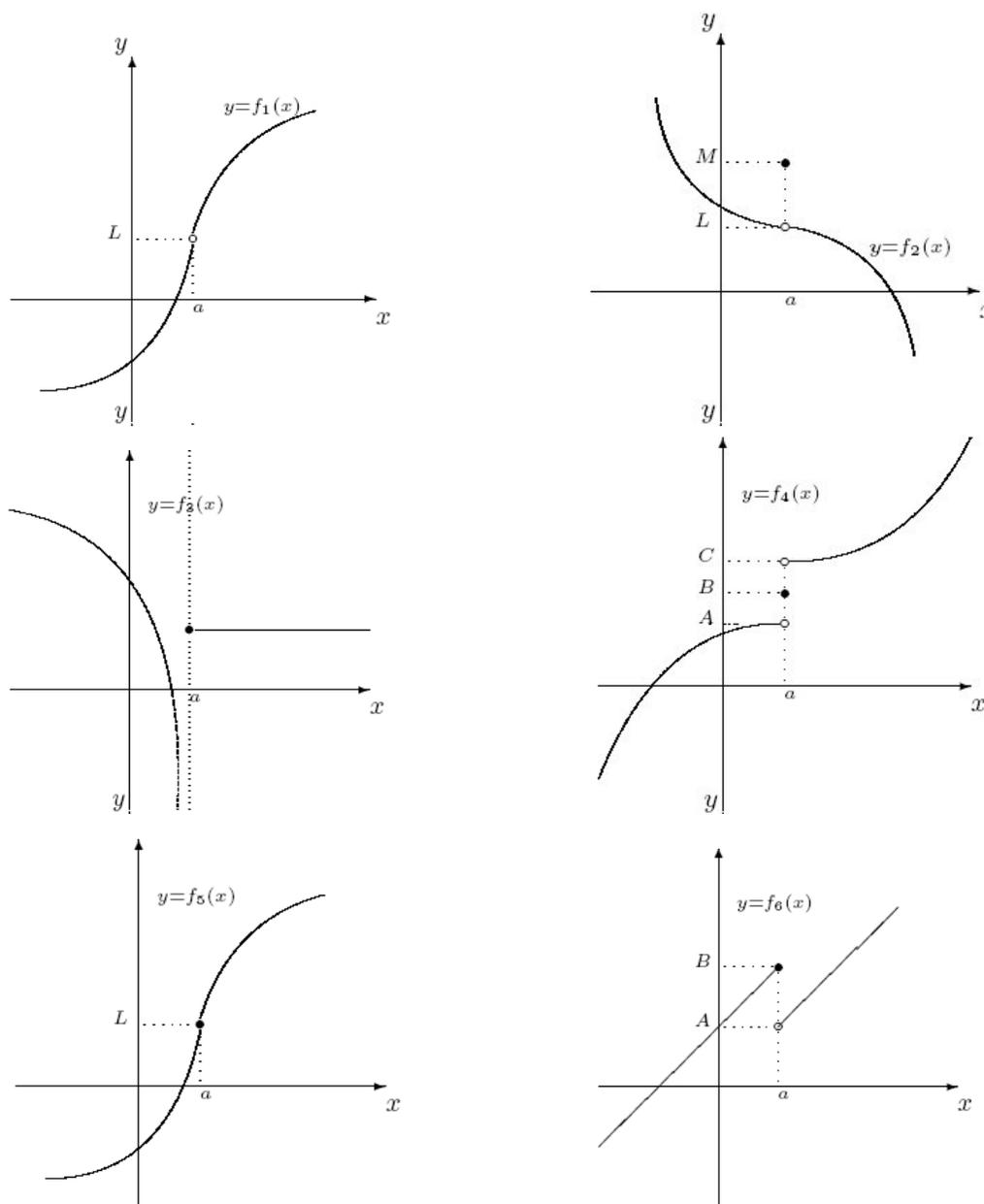


Continuidad

Temas: Introducción. Límites al infinito. Límites infinitos.

4.1. Introducción

Comparar $\lim_{x \rightarrow a} f_i(x)$ con $f_i(a)$, para $i = 1, \dots, 6$.



4.2. Definición de continuidad en un punto

Se dice que una función $y = f(x)$ es continua en $x = a$ cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$1) \text{ Existe } f(a)$$

$$2) \text{ Existe } \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Cuando $y = f(x)$ no es continua en $x = a$, se dice que es *discontinua en $x = a$* .

En general se dice que $y = f(x)$ es *continua en un conjunto A* , cuando es continua en cada punto de A .

4.3. Actividades

Estudiar la continuidad en $x = 3$ de las funciones:

$$a) y = f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x < 3 \\ x^2 & \text{si } x > 3 \\ -1 & \text{si } x = 3 \end{cases} \quad b) y = g(x) = \begin{cases} 7 & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

4.4. Tipos de Discontinuidad

- *De Primera Especie.* Los límites laterales de $f(x)$ en el punto a existen. Hay dos casos:
 - Los límites laterales en a son iguales, pero distintos a $f(a)$. Se llama discontinuidad *reparable*.
 - Los límites laterales en a son distintos. Se llama discontinuidad de *salto* (El salto es igual al valor absoluto de la diferencia de los límites laterales).
- *De Segunda Especie.* Al menos uno de los límites laterales en a *no existe*.

4.4.1. Ejemplo

Determinar y clasificar los puntos de discontinuidad de $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8}$ en \mathbb{R} .

Desarrollo: El numerador y el denominador son funciones continuas. Luego los únicos puntos de discontinuidad

posibles son aquellos en que se anula el denominador.

Ahora bien, como $x^3 + 7x - 8 = (x - 1)(x^2 + x + 8)$, el único punto de discontinuidad es el 1, pues no existe $f(1)$.

Entonces factorizando por $(x - 1)$ y luego simplificando:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 7x - 8} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x^2 + x + 8)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1}{x^2 + x + 8} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Como el límite precedente existe, se tiene que la discontinuidad en $x = 1$ es reparable.

4.5. Propiedades de la Funciones Continuas

4.5.1. Las funciones básicas son continuas.

Son continuas en su dominio las funciones: lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

4.5.2. Álgebra de funciones continuas.

Si f y g son continuas en un conjunto A , también lo son $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, con $g(a) \neq 0$.

4.5.3. La compuesta de funciones continuas es una función continua.

Si $g(t)$ es continua en $t = a$ y $f(x)$ es continua en $b = g(a)$ entonces $f \circ g$ es continua en $t = a$.

4.5.4. Teorema de Weierstrass.

Toda función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, es *acotada*, es decir, si f es continua en $[a, b]$, entonces existe $k \in \mathbb{R}^+$, tal que $|f(x)| \leq k$, para todo $x \in [a, b]$.



Carlos Weierstrass. (1815-1897) matemático alemán.

4.5.5. Teorema de acotamiento.

Una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ *alcanza* sus extremos, es decir existen puntos x_1, x_2 tales que:

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{para todo } x \in [a, b].$$



Bernard Bolzano (Praga, 1781-1848). Matemático checo.

4.5.6. Teorema de Bolzano.

Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$ y $f(a), f(b)$ son de signos opuestos entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Aplicación: Calculo aproximado de raíces irracionales.

4.5.7. Límite de una función compuesta.

Si $f(x)$ es continua en a entonces $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$.

4.6. Ejemplo

Verificar que la ecuación $x^3 - x - 3 = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2. Aproximar esta raíz con 2 decimales exactos.

Desarrollo: Como $f(x) = x^3 - x - 3$ es continua y $f(1)$ con $f(2)$ tienen signos distintos, entonces $f(x) = 0$ tiene una raíz entre 1 y 2.

Ahora bien, luego de la siguiente tabla de valores

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	-3	-2.769	-2.472	-2.103	-1.656	-1.125	-0.504	0.213	1.032	1.959	3

se tiene que el primer decimal exacto de la raíz es 6. ¿Por qué?.

Y por inspección de la siguiente tabla

x	1.6	1.61	1.62	1.63	1.64	1.65	1.66	1.67	1.68	1.69	1.7
$f(x)$	-0.504	-0.437	-0.368	-0.299	-0.229	-0.158	-0.086	-0.012	0.062	0.137	0.213

el segundo decimal exacto es 7. Por lo tanto, la raíz buscada, con dos decimales exactos, es 1.67.

4.7. Actividades

- Hacer el esbozo de una función, con dominio \mathbb{R} , que cumpla cada una de las siguientes condiciones:
 - 1) Ser continua en $x = 1$.
 - 2) Una discontinuidad reparable en $x = 0$.
 - 3) Una discontinuidad de salto en $x = 3$.
 - 4) Una discontinuidad de segunda especie en $x = 4$.
 - 5) No acotada.
 - 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$.
 - 6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -5$.

- Estudiar la continuidad en \mathbb{R} de las siguientes funciones. Cuando existan puntos de discontinuidad, clasificarlos.

a) $f_1(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

b) $f_2(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

c) $f_3(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$

d) $f_4(x) = e^x \sin(2x - 1)$

e) $f_5(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+x+5}$

f) $f_6(x) = 1 + \tan(2x)$

g) $f_7(x) = x - \text{ent}(x)$

h) $f_8(x) = \frac{x}{|x|}$

i) $f_9(x) = \frac{1-x}{1-|x|}$

$$j) f_{10}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad k) f_{11}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{7x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad l) f_{12}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{7x-1}{x+1} & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- Claramente la función $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ es discontinua en $x = 1$. ¿Cómo habría que definir $f(1)$, para que esta nueva función sea continua en todo \mathbb{R} ?

- Para la función $f(x) = \frac{x^4 + 4x^3 + x^2 - 6x}{x^4 - 7x^2 - 6x}$, encontrar valores de x , en caso de existir, para los cuales esta función tenga discontinuidades reparables e irreparables.

- Verificar que la ecuación $x^5 - 3x = 1$ tiene una raíz entre 1 y 2. Determinarla con 2 decimales exactos.

- Verificar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene una raíz positiva menor que 1. Determinarla con 2 decimales exactos.

- Comprobar que la ecuación $\frac{a}{x-\lambda_1} + \frac{b}{x-\lambda_2} + \frac{c}{x-\lambda_3} = 0$, donde a, b y c son positivos y $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ tiene 2 raíces reales comprendidas en los intervalos $]\lambda_1, \lambda_2[$ y $]\lambda_2, \lambda_3[$.

4.8. Desafío

Un auto viaja de Talca a Curicó, que están a 60km, en una hora pero no fue a velocidad constante. *Demostrar que en algún instante el auto fue a exactamente 60km/h.*