U.N.D.E.D (Ceuta)*Curso escolar 2001/02***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Funciones continuas

Código: ACANMA14.WPD

Ejercicio nº 1.- (propuesto en febrero de 2001)Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} -3 \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, entonces:

- f es continua en todo $\mathbb{R}$, si $a=3/2$ y $b=-3/2$
- f es continua en todo $\mathbb{R}$, si $a=-3/2$ y $b=3/2$
- Ninguna de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 2.- (propuesto en septiembre de 2001)

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x + Lx & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$ ¿Dónde es continua?
Nota: $Lx = \ln(x)$

Ejercicio nº 3.- (propuesto en septiembre de 1996)

La función $f(x) = x \cotg x$ está indeterminada en $x=0$. El valor que debe tomar f en 0 de forma que sea continua es:

- $f(0) = 1$
- $f(0) = 2$
- $f(0) = \pi$

SOLUCIONES

CÓDIGO : ACANMA14.WPD

Ejercicio nº 1

$$f(x) = \begin{cases} -3 \operatorname{sen} x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Es evidente que :

 $f(x) = -3 \operatorname{sen} x$ es continua en $(-\infty, -\frac{\pi}{2})$ $f(x) = a \operatorname{sen} x + b$ es continua en $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ $f(x) = \cos x$ es continua en $(\frac{\pi}{2}, +\infty)$ Para que $f(x)$ sea continua en todo $\mathbb{R}$ debe serlo en también en $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$

Entonces :

$$f(x) \text{ continua en } -\frac{\pi}{2} \iff \begin{cases} (1^\circ) f(-\frac{\pi}{2}) \text{ existe, es decir, } -\frac{\pi}{2} \in D_f \\ (2^\circ) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = l \text{ (existe)} \\ (3^\circ) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = l = f(-\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$

Veamos si se cumplen las condiciones :

$$(1^\circ) f(-\frac{\pi}{2}) = -3 \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) = -3(-1) = 3 \quad \text{Por tanto, } -\frac{\pi}{2} \in D_f$$

$$(2^\circ) \text{ Veamos si existe } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^-} (-3 \operatorname{sen} x) = -3 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -3 \cdot (-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} (a \operatorname{sen} x + b) = a \operatorname{sen}(-\frac{\pi}{2}) + b = a(-1) + b = -a + b$$

Para que $f(x)$ tenga límite cuando $x \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ debe ser $-a + b = 3$

$$(3^\circ) \text{ Si } -a + b = 3 \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = f(-\frac{\pi}{2})$$

Por tanto: Si $-a + b = 3$, $f(x)$ es continua en $x = -\frac{\pi}{2}$.

Analicemos la continuidad en $\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) \text{ continua en } \frac{\pi}{2} \iff \begin{cases} (1^\circ) f(\pi/2) \text{ existe, es decir, } \frac{\pi}{2} \in D_f \\ (2^\circ) \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = l \text{ (existe)} \\ (3^\circ) \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x) = l = f(\pi/2) \end{cases}$$

Veamos si se cumplen las condiciones:

$$(1^\circ) f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2} = 0. \text{ Por tanto, } \frac{\pi}{2} \in D_f$$

$$(2^\circ) \text{ Veamos si existe } \lim_{x \rightarrow \pi/2} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (a \operatorname{sen} x + b) = a \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + b = a \cdot 1 + b = a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} \cos x = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x)$ debe ocurrir que $a + b = 0$

$$(3^\circ) \text{ Si } a + b = 0 \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Por tanto: Si $a + b = 0$, la función $f(x)$ será continua en $x = \frac{\pi}{2}$

Por tanto:

$$\bullet \text{ Si ocurre que } \begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 0 \end{cases} \text{ la función } f(x) \text{ es continua en todo } \mathbb{R}.$$

Hallemos los valores de a y b

$$\begin{cases} -a + b = 3 \\ a + b = 0 \end{cases} \text{ sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas.}$$

$$2b = 3 \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$

$$a = -b \Rightarrow \boxed{a = -\frac{3}{2}}$$

Conclusión: Si $a = -\frac{3}{2}$ y $b = \frac{3}{2}$, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$.

La respuesta correcta es (b)

Ejercicio n° 2

$$f(x) = \begin{cases} x + Lx & \text{si } x > 1 \\ x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Contes, temos a la alternativa (a)

• $\forall x < 1$ tenemos $f(x) = x^2$ es continua por ser $f(x)$ una función polinómica.
Por tanto: $f(x)$ es continua en $(-\infty, 1)$

• $\forall x > 1$ tenemos que $f(x) = x + Lx$

Llamando $g(x) = x$, continua en $(1, +\infty)$
 $h(x) = Lx$, continua en $(1, +\infty)$ } $\Rightarrow f(x) = x + Lx$ es continua en $(1, +\infty)$

Nota: La función $h(x) = Lx$ es continua en $(0, +\infty)$

Por tanto:

$f(x)$ es continua en $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

Nos queda ver si es continua en $x = 1$

$f(x)$ es continua en $x = 1 \iff \begin{cases} (1^\circ) f(1) \text{ existe} \\ (2^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l \text{ existe} \\ (3^\circ) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l = f(1) \end{cases}$

Veamos si se cumplen las condiciones:

(1°) $f(1) = 1^2 = 1$ (existe)

(2°) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$ debemos estudiar los límites laterales.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + Lx) = 1 + L \cdot 1 = 1 + 0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1^2 = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

(3°) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$

Es decir, $f(x)$ también es continua en $x = 1$

Conclusión: $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

Ejercicio nº 3.-

$$f(x) = x \cdot \cotg x$$

$$f(x) \text{ es continua en } x=0 \iff \begin{cases} (1^\circ) f(0) \text{ (existe)} \\ (2^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \text{ (existe)} \\ (3^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l = f(0) \end{cases}$$

Veamos:

(1°) $f(0) = 0 \cdot \cotg 0 = \text{no existe}$ porque $\cotg 0$ no existe. Busquemos un valor para $f(0)$.

$$\begin{aligned} (2^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \cotg x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \cdot \cos x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

Asignando $f(0) = 1$ tenemos que $f(x)$ es continua en $x=0$

La respuesta correcta es (a)