U.N.D.E.D (Ceuta) *Curso escolar 2000/01*
ESTUDIOS: Ingeniería Técnica Informática
ASIGNATURA: Análisis Matemático. Curso 1°
TEMA: Límite de funciones Código: ACANMA01.WPD

Ejercicio nº 1 .-

Hallar el valor del límite de la función f(x) cuando x tiende a $+\infty$.

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)} - x$$

Ejercicio nº 2 .- (propuesto en septiembre de 2000)

El valor del siguiente límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1} \right)$$

a) 1
b) ∞
c) Ninguno de las anteriores respuestas.

Ejercicio nº 3 .- (propuesto en septiembre de 2000)

El valor del siguiente límite es:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x}{1+x} + \frac{2x}{1-x} \right]$$

a) 1
b) 5
c) Ninguna de las anteriores repuestas.

Ejercicio nº 4 .-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \; senx}{x^2 + 1}$$

Ejercicio nº 5 .-

Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

SOLUCIONES

CÓDIGO: ACANMA01.WPD

Ejercicio nº 1

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x\cdot(x+1)} - x \right) = \sqrt{\infty.(\infty+1)} - \infty = \sqrt{\infty^2} - \infty = \infty - \infty$$

INDETERMINADO

Solvemos la indeterminación:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x.(x+1)} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x\cdot(x+1)} - x\right)\cdot\left(\sqrt{x\cdot(x+1)} + x\right)}{\sqrt{x\cdot(x+1)} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x\cdot(x+1)}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x\cdot(x+1)} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\cdot(x+1) - x^2}{\sqrt{x\cdot(x+1)} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x\cdot(x+1)} + x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x\cdot(x+1)} + x} = \frac{\infty}{\sqrt{\infty^2} + \infty} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDETERMINADO}$$

Volvemos a salvar la indeterminación:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x\cdot(x+1)} - x \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+x} + x}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{x^2+x}}{x} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\infty}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 0'5$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2} = 0'5}$$

Ejercicio nº 2

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\sqrt{\infty^2-\infty}-\sqrt{2\cdot\infty^2+1}=\infty-\infty=\text{INDETERMINADO}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2-\left(\sqrt{2x^2+1}\right)^2}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x-2x^2-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-x-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}=$$

$$=\frac{-\infty^2-\infty-1}{\sqrt{\infty^2-\infty}+\sqrt{2\infty^2+1}}=\frac{-\infty}{\infty}=\text{INDETERMINADO}$$

NOTA: Se observa que el numerador es $-\infty^2$ y el denominador $\sqrt{\infty^2}=\infty$, por lo que podemos asegurar que el límite es $-\infty$.

No obstante lo haremos salvando la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-x-1}{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}=$$ Dividiendo numerador y denominador por la mayor potencia de x en el denominador =

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^2-x-1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x}+\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{x^2}{x}-\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x}}{x}+\frac{\sqrt{2x^2+1}}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}}+\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2}}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}=\frac{-\infty-1-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{1}{\infty}}+\sqrt{2+\frac{1}{\infty^2}}}=\frac{-\infty-1-0}{\sqrt{1-0}+\sqrt{2+0}}=\frac{-\infty-1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=-\frac{\infty}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}=-\infty$$

Por tanto: $$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-x}-\sqrt{2x^2+1}\right)=-\infty}$$

Conclusión: $\boxed{\text{La respuesta correcta es } \text{(c)}}$

Ejercicio nº 3

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{1+x}+\frac{2x}{1-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{1+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1-x}=\frac{3\cdot\infty}{1+\infty}+\frac{2\cdot\infty}{1-\infty}=$$

$$=\frac{\infty}{\infty}+\frac{\infty}{\infty}=\text{INDETERMINADO.}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{1+x}+\frac{2x}{1-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{1+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{\frac{1+x}{x}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\frac{1-x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\frac{1}{x}+1}+\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\frac{1}{x}-1}=\frac{3}{\frac{1}{\infty}+1}+\frac{2}{\frac{1}{\infty}-1}=\frac{3}{0+1}+\frac{2}{0-1}=3-2=\underline{\underline{1}}$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x}{1+x}+\frac{2x}{1-x}\right]=1}$

Conclusión: $\boxed{\text{La respuesta correcta es (a)}}$

Ejercicio nº 4.-

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\operatorname{sen}x}{x^2+1}=\frac{\infty\cdot[\text{nº entre }-1\text{ y }1]}{\infty^2+1}=\text{INDETERMINADO}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\operatorname{sen}x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x\cdot\operatorname{sen}x}{x}}{\frac{x^2+1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x+\frac{1}{x}}=\frac{\operatorname{sen}\infty}{\infty+\frac{1}{\infty}}=$$

$$=\frac{\text{nº comprendido entre }-1\text{ y }1}{\infty+0}=\frac{\overset{-1\le\alpha\le1}{\alpha}}{\infty}=\underline{\underline{0}}$$

Por tanto: $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot\operatorname{sen}x}{x^2+1}=0}$

Ejercicio nº 5

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{\sqrt{1+0}-1}{0}=\frac{\sqrt{1}-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminado}$$

Salvemos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)\cdot(\sqrt{1+x}+1)}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x})^2-1^2}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot(\sqrt{1+x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}=0'5$$

Por tanto:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\frac{1}{2}=0'5}$$