

U.N. .E.D (Ceuta)*Curso escolar 2000/01***ESTUDIOS:** Ingeniería Técnica Informática**ASIGNATURA:** Análisis Matemático. Curso 1º**TEMA:** Límites de funciones

Código: ACANMA03.WPD

EJERCICIOS

1º) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 21x^2 + 60x - 25}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50}$$

2º) Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 2}{-2x^2 - 9}$

a) Cuando $x \rightarrow +\infty$

b) Cuando $x \rightarrow -\infty$

3º) Calcular el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} \left(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} \right)$$

4º) Calcular el límite de la función $f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3}$ cuando x tiende a 3.

5º) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{5}{x^3 - 1} \right)$$

6º) Calcular el límite de la función $f(x) = e^{\frac{|x+1|}{x+1}}$ cuando x tiende a -1.

7º) Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x^2 - 4x|}{|2x - 8|}$$

EJERCICIOS

Código:

ACANAMA03.WPD

Ejercicio nº 1

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 21x^2 + 60x - 25}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50} = \frac{2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 - 25}{5^3 - 8 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 50} = \frac{250 - 525 + 300 - 25}{125 - 200 + 25 + 50} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO}$$

- Como $x=5$ es una raíz del polinomio numerador, la división:

$$2x^3 - 21x^2 + 60x - 25 : x - 5 \text{ es exacta}$$

- Como $x=5$ es una raíz del polinomio denominador, la división:

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 50 : x - 5 \text{ es exacta.}$$

Efectuemos ambas divisiones por el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -21 & 60 & -25 \\ 5 & & 10 & -55 & 25 \\ \hline & 2 & -11 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 5 & 50 \\ 5 & & 5 & -15 & -50 \\ \hline & 1 & -3 & -10 & 0 \end{array}$$

cociente: $c(x) = 2x^2 - 11x + 5$

cociente: $d(x) = x^2 - 3x - 10$

$$2x^3 - 21x^2 + 60x - 25 = (x-5) \cdot (2x^2 - 11x + 5)$$

$$x^3 - 8x^2 + 5x + 50 = (x-5) \cdot (x^2 - 3x - 10)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 21x^2 + 60x - 25}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (2x^2 - 11x + 5)}{(x-5) \cdot (x^2 - 3x - 10)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 3x - 10} \\ &= \frac{2 \cdot 5^2 - 11 \cdot 5 + 5}{5^2 - 3 \cdot 5 - 10} = \frac{55 - 55}{25 - 25} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO} \end{aligned}$$

- Como $x=5$ es una raíz del polinomio $2x^2 - 11x + 5$, la división $2x^2 - 11x + 5 : x - 5$ es exacta.

- Como $x=5$ es una raíz del polinomio $x^2 - 3x - 10$, la división $x^2 - 3x - 10 : x - 5$ es exacta.

Efectuemos ambas divisiones:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -11 & 5 \\ 5 & & 10 & -5 \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} c(x) = 2x - 1 \\ 2x^2 - 11x + 5 = (x-5) \cdot (2x-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -3 & -10 \\ 5 & & 5 & 10 \\ \hline & 1 & 2 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} f(x) = x + 2 \\ x^2 - 3x - 10 = (x-5) \cdot (x+2) \end{array}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^3 - 21x^2 + 60x - 25}{x^3 - 8x^2 + 5x + 50} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{x^2 - 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5) \cdot (2x-1)}{(x-5) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x-1}{x+2} = \frac{2 \cdot 5 - 1}{5 + 2} = \frac{9}{7}$$

Ejercicio nº 2

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 2}{-2x^2 - 9} = -\infty$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 6x - 2}{-2x^2 - 9} = +\infty$$

Ejercicio nº 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - x) = \sqrt[3]{\infty^3+\infty^2} - \infty = \infty - \infty = \text{INDET.} \end{aligned}$$

Por tanto: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - x)$

Sea $\begin{cases} a = \sqrt[3]{x^3+x^2} \\ b = x \end{cases}$ Entonces $\begin{cases} a^3 = x^3+x^2 \\ b^3 = x^3 \end{cases}$

Ahora bien, la división $a^3 - b^3 : a - b$ es exacta.
Efectuemos la división:

$$\begin{array}{r} a^3 + 0a^2 + 0a - b^3 \\ -a^3 + 6a^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6a^2 + 0a - b^3 \\ -6a^2 + 6^2a \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6^2a - b^3 \\ -6^2a + b^3 \\ \hline \end{array}$$

0

$$\frac{a-b}{a^2+ba+b^2}$$

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ba + b^2)$$

y por tanto $a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ba + b^2}$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (a-b) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ba + b^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2)^2} + x \cdot \sqrt[3]{x^3 + x^2} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4} + \sqrt[3]{x^6 + x^5} + x^2} =$$

$$= \frac{\infty^2}{\sqrt[3]{\infty^6} + \sqrt[3]{\infty^6} + \infty^2} = \frac{\text{grado numerador } 2}{\text{grado denominador } 2} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDETERMINADO}$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2/3} (\sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4} + \sqrt[3]{x^6 + x^5} + x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x^6 + x^5}}{x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{x^6 + 2x^5 + x^4}}{x^2} + \frac{\sqrt[3]{x^6 + x^5}}{x^2} + 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^6 + 2x^5 + x^4}{x^6}} + \sqrt[3]{\frac{x^6 + x^5}{x^6}} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + 1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{\infty}} + 1} = \frac{1}{\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1} + 1} = \frac{1}{1 + 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

Ejercicio n° 4.-

$$f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{|2 \cdot 3 - 6|}{3-3} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO}$$

Expresemos la función $f(x)$ por intervalos:

$$f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3} = \frac{2 \cdot |x-3|}{x-3} = \begin{cases} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2 & \text{si } x-3 > 0 ; x > 3 \\ \frac{2 \cdot (3-x)}{x-3} = \frac{-2 \cdot (x-3)}{x-3} = -2 & \text{si } x-3 < 0 ; x < 3 \end{cases}$$

$$\text{Por tanto: } f(x) = \frac{|2x-6|}{x-3} = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 3 \\ 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Buscamos $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

Como la recta $x=3$ divide a la función en dos gráficas diferentes, debemos hallar los límites laterales:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-2) = -2 \\ \quad \quad \quad \hookrightarrow x < 3 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 2 = 2 \\ \quad \quad \quad \hookrightarrow x > 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Ejercicio nº 5

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1} \right) = \frac{1}{1^2-1} - \frac{5}{1^3-1} = \frac{1}{0} - \frac{5}{0} = \infty - \infty = \text{INDET.}$$

operamos:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1-5(x^2-1)}{(x^2-1)(x^3-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1-5x^2+5}{x^5-x^2-x^3+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+4}{x^5-x^2-x^3+1} = \frac{1^3-5 \cdot 1^2+4}{1^5-1^3-1^2+1} = \frac{0}{0} = \text{INDETERMINADO}$$

Dividimos numerador y denominador entre $x-1$:

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 0 & 4 \\ & & 1 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & -4 & 0 \end{array}$$

$$c(x) = x^2 - 4x - 4$$

$$x^3 - 5x^2 + 4 = (x-1)(x^2 - 4x - 4)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ & & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$d(x) = x^4 + x^3 - x - 1$$

$$x^5 - x^3 - x^2 + 1 = (x-1)(x^4 + x^3 - x - 1)$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-5x^2+4}{x^5-x^2-x^3+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2-4x-4)}{(x-1)(x^4+x^3-x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-4x-4}{x^4+x^3-x-1} =$$

$$= \frac{1^2-4 \cdot 1-4}{1^4+1^3-1-1} = \frac{-7}{0} = \underline{\underline{-\infty}}$$