Límites I

Temas: Introducción Noción informal de límites de una FRVR. Cálculo de límites numéricamente (usando tabla de valores). Límites laterales. Cálculo de límites gráficamente (usando el gráfico de una función).

1.1. Introducción: Idea intuitiva de Límite

El cálculo infinitesimal es una rama de la matemática que se abre con un nuevo concepto: **límite de una FRVR**, el que permitirá abordar y resolver problemas más generales que los trabajados hasta este momento. Veamos, por ejemplo, algunos problemas ya resueltos junto a los que ahora podremos resolver:

1.2. Sin límites ... con límites

- **DE**: Calcular la pendiente de una recta

  A: Calcular la pendiente de una curva

- **DE**: Calcular una recta que pasa por dos puntos de una curva

  A: Calcular la tangente a una curva

- **DE**: Calcular la altura de una curva en $x = c$

  A: Calcular la altura máxima de una curva en un intervalo

- DE: Calcular el área de un rectángulo

  A: Calcular el área limitada por:

  - arriba: gráfico de $y = f(x)$
  - abajo : Eje X
  - izquierda : $x = a$ derecha : $x = b$

- **DE**: Longitud de un segmento

  A: Longitud de una porción de curva

- DE: Sumar un número finito de términos

  A: Sumar un número **infinito** de términos

etc.

1.3. Actividad 1

Para iniciar el estudio del concepto de límite, desarrollar la siguiente actividad:

Considerar la función $y = f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$; $x \neq 1$

Problema 1. ¿Qué sucede con $y = f(x)$ cuando $x = 1$?

Problema 2. ¿Qué sucede con $y = f(x)$ cuando x se aproxima al 1?

Desarrollo

Problema 1. Notar que $1 \notin Dom(f)$, luego NO EXISTE $f(1)$.

Problema 2. En este caso lo que interesa es el comportamiento de f **cerca** de $x = 1$ matemáticamente, esto se dice: en una **vecindad** de $x = 1$. Para esto nos **acercamos** al punto $x = 1$ tanto por la **izquierda** como por la **derecha**.

$\mathbb{R}$

$\longrightarrow \; 1 \; \longleftarrow$

(por la izquierda) (por la derecha)

Por la izquierda:

x	0,6	0,8	0,9	0,99	0,999	...	$\to$	1^-
$f(x)$						...	$\to$	

Por la derecha:

x	1,4	1,2	1,1	1,01	1,001	...	$\to$	1^+
$f(x)$						...	$\to$	

Usando la información de las tablas precedentes; responder:

1. ¿Cuándo nos **acercamos** a $x = 1$ por la izquierda, hacia dónde se **acercan las imágenes**?

2. idem por la derecha.

3. ¿Qué se puede concluir?

La conclusión recién aludida es:

$$f(x) \text{ se acerca } (\textit{se aproxima}, \text{ ó } \textit{tiende}, \text{ o } \longrightarrow) \text{ a } 3, \text{ cuando } x \text{ se acerca a } 1$$

lo que también se puede anotar:

$$\boxed{f(x) \longrightarrow 3, \ \text{cuando } x \longrightarrow 1}$$

o bien;

$$\boxed{(x \longrightarrow 1) \qquad \Longrightarrow \qquad (f(x) \longrightarrow 3)}$$

o bien;

$$\boxed{f(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 3}$$

En las relaciones precedentes al número 3 se le da el nombre de **límite de** $f(x)$ **cuando** $x \to 1$ y se anota

$$\boxed{\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3}$$

Importante: Observar que en este estudio **no interesa** el comportamiento de la función **en el punto**, si no **a su alrededor**.

1.4. Límites laterales

Repetir el ejercicio precedente con la función

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \tag{1.1}$$

en el punto $x = 2$.

¿Hay alguna diferencia entre las conclusiones de este ejercicio con el anterior? Comentar.

Respuesta: En este caso se tiene que

$$(x \to 2-) \Longrightarrow (f(x) \to 1)$$

$$(x \to 2+) \Longrightarrow (f(x) \to 6)$$

Lo que se anota:

$$\boxed{\lim_{x\to 2-} f(x) = 1} \qquad \boxed{\lim_{x\to 2+} f(x) = 6}$$

y se llaman **límites laterales de** $f(x)$ **en** $x = 2$ (por la izquierda y derecha respectivamente).

1.5. Teorema

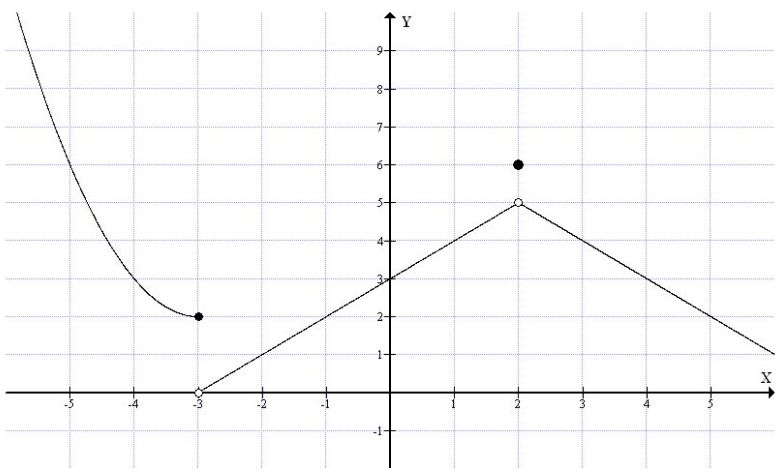
$\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y solo si los límites laterales existen y **son iguales entre si**, es decir

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to a-} f(x) = L$$

Notar que cuando $\lim_{x\to a-} f(x) \neq \lim_{x\to a+} f(x)$ o uno de ellos no existe, entonces no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

1.6. Límites gráficamente

Una cierta función $y = f(x)$ tiene el siguiente gráfico.



A partir de este gráfico, se pide estimar el valor de cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ c) $\lim_{x\to -3} f(x)$ e) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ f) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$
g) $\lim_{x\to 0} f(x)$ e) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ f) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ g) $\lim_{x\to 2} f(x)$

1.7. Actividades

1. Estudiar, usando tabla de valores, el límite de la función dada en el punto indicado.

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$ $\qquad x = 2$

b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ $\qquad x = 0$

c) $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\qquad x = 0$

d) $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ $\qquad x = 0$

2. Para cada una de las siguientes funciones

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2+4 & \text{si } x > 2 \\ 3x+3 & \text{si } x < 2 \end{cases} \qquad \text{b) } g(x) = \begin{cases} \sqrt{4x+1} & \text{si } x > 2 \\ 2x-1 & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

se pide estudiar sus límites, cuando x tiende a 2. Hacer un esbozo del gráfico de cada función.

1.8. Desafío

Para la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3+A & \text{si } x > 1 \\ 2x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

se pide determinar el valor de A, de modo que exista el $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.