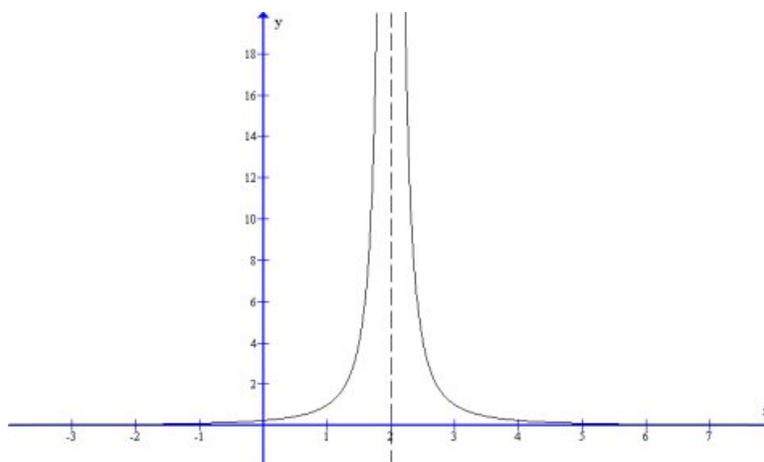


Límites III

Temas: Introducción. Límites al infinito. Límites infinitos.

3.1. Límites infinitos



¿qué sucede cuando $x \rightarrow 2$?

1. ¿Qué sucede con $f(x)$ cuando $x \rightarrow 2^+$?

2. ¿Cómo se comporta $f(x)$ cuando $x \rightarrow 2^-$?

Como habrá observado, cuando $x \rightarrow 2$, $f(x)$ *crece indefinidamente, sin cota superior*. Luego, no existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Haciendo un abuso de lenguaje y notación, se dice que límite de $f(x)$, cuando $x \rightarrow 2$, es $+\infty$. Se anota:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

3.2. Límites en el infinito

1. ¿Qué se puede decir de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$?

2. Lo mismo para $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{|x|}$

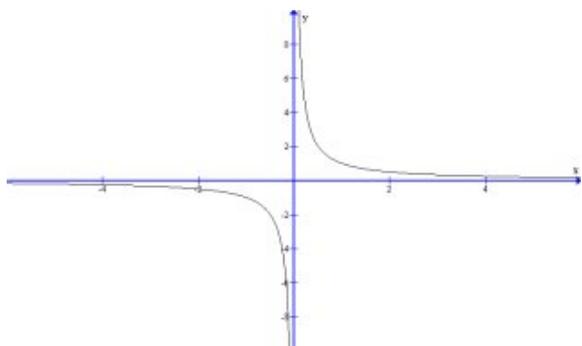


Gráfico de $y = \frac{1}{x}$

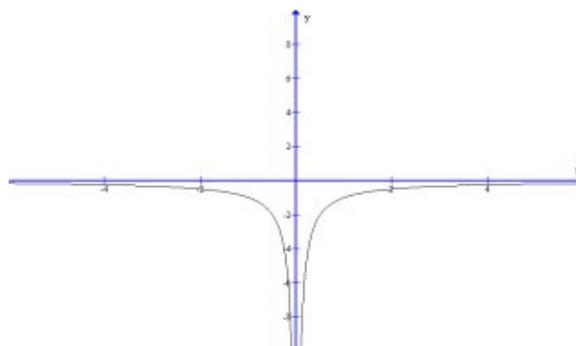


Gráfico de $y = -\frac{1}{|x|}$

Según lo visto en los ejercicios precedentes es posible que cuando $x \rightarrow x_0$, $f(x)$ se vaya a $+\infty$, o bien a $-\infty$, o bien a ∞ . Esto sugiere la idea de estudiar también el comportamiento de $y = f(x)$ cuando $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow \infty$.

3.3. Actividades

1. Verificar, cada uno de los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{x} = 1$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 + x + 5} = 2$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

2. Hacer el gráfico de **una** función $y = f(x)$ que cumple **cada una** de las siguientes condiciones:

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 2$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -10$

3. Verificar el siguiente límite especial $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$.

4. Calcular

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, a > 0 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, a > 0 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}, a > 0 \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 1} - x \right) & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+a} - \sqrt{x}) & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) & \text{i) } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - x) \end{array}$$

5. Calcular el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(ax+1)^n}{x^n + A}$, para cada uno de los siguientes casos:
 a) n entero positivo. b) n entero negativo. c) $n = 0$.

3.4. Desafío

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$