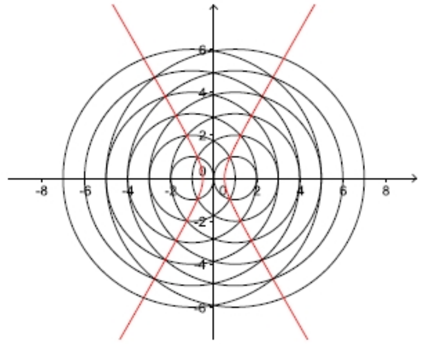


-8
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
6
4
2
-2
-4
-6

1. Definición

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos del plano cuyo valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos es constante. Más claramente:

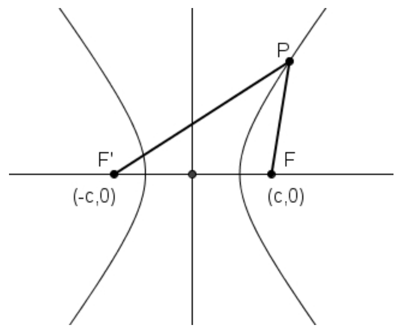
Dados (elementos bases de la hipérbola)

- *Dos puntos F y F' del plano, denominados* focos *de la hipérbola.*
- *Un número positivo, α, menor que $d(F, F')$.*

se llama hipérbola *al lugar geométrico de los puntos del plano cuyo valor absoluto de la* diferencia *de las distancias del punto P a los puntos dados F y F' es constante e igual a α, es decir,*

$$|d(P, F) - d(P, F')| = \alpha \tag{1}$$

2. Deducción de la ecuación de la hipérbola



Para obtener la ecuación más simple de la hipérbola:

- se toma el eje X pasando por los puntos F' y F y el origen en el punto medio del segmento $F'F$.
- se asignan las coordenadas: $F'(-c,0)$ y $F(c,0)$.
- se define $\alpha = 2a$, de donde $a < c$ (¿por qué?).

Luego, la condición (1), queda

$$|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}| = 2a \tag{2}$$

de donde:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a \tag{3}$$

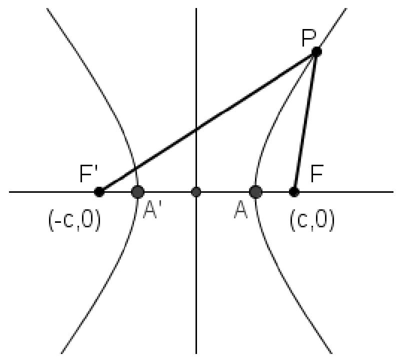
y trabajando de manera similar al caso de la elipse, se obtiene

$$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \tag{4}$$

definiendo $c^2 - a^2 = b^2$, sustituyendo y finalmente dividiendo por a^2b^2, se obtiene la llamada *ecuación canónica y reducida de la hipérbola*:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5}$$

3. Elementos asociados a una hipérbola



- *Focos*: son los puntos dados (y fijos) $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$.
- *Eje focal*: Es la recta que pasa por los focos (en este caso, el eje X).
- *Centro*: Es el punto de intersección de los ejes (en este caso, el origen).
- *Radios vectores*: Son los segmentos PF' y PF. del segmento $F'F$.
- *Vértices*: Son los puntos de intersección de la hipérbola con su eje focal: A y A'.
- *Eje transversal*: es el segmento AA' de longitud $2a$.
- *Eje conjugado*: es el segmento que une los puntos $(0, -b)$ y (0,b), en la recta perpendicular en el centro de la hipeérbola. Su longitud es $2b$.

Nota: Si el eje focal de la hipérbola coincide con el eje Y, de manera que los coordenadas de los focos sean $(0, c)$ y $(0, -c)$, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{6}$$

4. Relaciones entre los parámetros de la hipérbola

- Para cada hipérbola, sus parámetros a , b y c están ligados por la relación $c^2 - a^2 = b^2$.
- $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$, se llama *excentricidad* de la hipérbola. Notar que $e > 1$.

5. Ejemplo

Los vértices de una hipérbola son los puntos $A(0,3)$ y $A'(0,-3)$ y sus focos son los puntos $F(0,5)$ y $F'(0,-5)$. Encontrar la ecuación de la hipérbola, la longitud de su eje mayor y su excentricidad. Graficar.

6. Asíntotas de la hipérbola

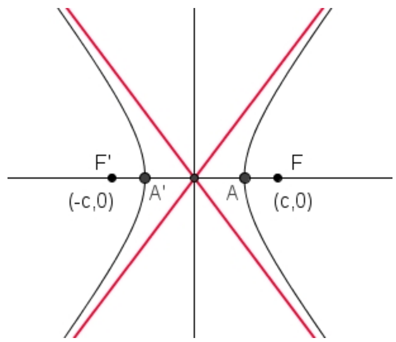
1. De (5), se obtiene que

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \tag{7}$$

2. Por una cuidadosa inspección de (5), se deduce que, a medida que *x crece (o decrece) sin límite*, la ecuación precedente se va *transformando* en las ecuaciones de las rectas

$$y = \pm \frac{b}{a} x \tag{8}$$

   Por lo tanto, a medida que *x crece (o decrece) sin límite* los puntos de la hipérbola (5) se van acercando, cada vez más, a las rectas (8). Luego, estas dos rectas son asíntotas de la hipérbola (5).



Asíntotas de la hipérbola

7. Hipérbola con centro (h, k) y ejes paralelos a los ejes coordenados

- La ecuación de la hipérbola de centro en el punto (h, k) y eje focal paralelo al eje X , esta dada por

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

siendo

$$\frac{x-h}{a} = \pm\frac{y-k}{b} \tag{10}$$

las ecuaciones de sus asíntotas.

- Si el eje focal es paralelo al eje Y, la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

siendo

$$\frac{y-k}{a} = \pm\frac{x-k}{b} \tag{12}$$

las ecuaciones de sus asíntotas.

- Para cada hipérbola, a es la longitud del semieje mayor, c es la distancia del centro a cada foco, y a, b y c están ligadas por la relación $c^2 = a^2 + b^2$.

- Desarrollando las ecuaciones (8) y (11) se obtiene que la *ecuación general de la hipérbola* (con ejes paralelos al los ejes coordenados) es

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{13}$$

con A y B sean de *distinto signo*. ¿Bajo que condiciones (13) representa una hipérbola?.

8. Ejemplo

Verificar que la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ es una hipérbola. Determinar su centro, eje focal, vértices, focos, excentricidad y ecuaciones de sus asíntotas. Hacer un esbozo de su gráfico.

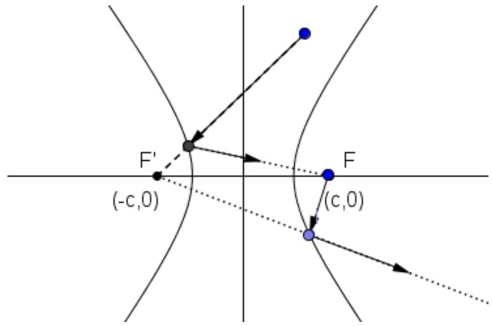
9. Hipérbola y rectas tangentes

1. Sea (x_0, y_0) es un punto en la hipérbola (5). La ecuación de la recta tangente a la hipérbola en este punto es
$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \tag{14}$$

2. Las rectas tangentes a la hipérbola (5) de pendientes m son:
$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2},\ \text{con } |m| > \frac{b}{a} \tag{15}$$

10. Aplicaciones

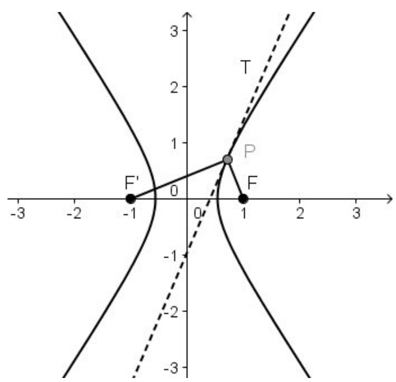
1. **Propiedad óptica**. En un espejo hiperbólico, un rayo de luz dirigido hacia uno de los focos es reflejado hacia el otro foco, y un rayo de luz que sale de un foco es reflejado, alejándose de otro foco y en la dirección del otro foco.



Esta propiedad de la hipérbola proviene del siguiente:

10.1. Teorema

La tangente a una hipérbola en cualquier punto de la curva es bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de ese punto.



2. **Astronomía**. Trayectorias de cometas.

   Un cuerpo celeste que provenga del exterior del sistema solar, siendo atraído por el sol y que luego se aleje (sin volver), en algunos casos, describirá una órbita hiperbólica, teniendo como un foco al sol y saldrá nuevamente del sistema solar. Esto sucede con algunos cometas.

11. Actividades

1. Hallar los vértices, focos y excentricidad de las siguientes hipérbolas. Graficar.

   a) $9x^2 - 4y^2 = 36$ b) $4x^2 - 9y^2 = 36$ c) $9y^2 - 4x^2 = 36$

   Sol. a) $(\pm 2, 0)$, $(\pm\sqrt{13}, 0)$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$. b) $(\pm 3, 0)$, $(\pm\sqrt{13}, 0)$, $\frac{\sqrt{13}}{3}$. c) $(0, \pm 2)$, $(0, \pm\sqrt{13})$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$.

2. Se llama *lado recto* de la hipérbola al segmento que pasa por un foco, vertical al eje focal y une dos puntos de dicha hipérbola. Verificar que la longitud el lado recto de la hipérbola (5) viene dada por $\frac{2b^2}{a}$. Encontrar las longitudes de los lados rectos de las hipérbolas de la actividad precedente. *Sol.* 9, $\frac{8}{3}$, 9.

3. Los vértices de una hipérbola son los puntos $(\pm 2, 0)$ y sus focos son los puntos $(\pm 3, 0)$. Hallar su ecuación y su excentricidad. *Sol.* $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, 1.5.

4. Los vértices de una hipérbola son $(0, \pm 4)$ y su excentricidad es igual a $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola y las coordenadas de sus focos. *Sol.* $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$, $(0, \pm 6)$.

5. ¿Qué tienen en común la familia de hipérbolas $3x^2 - 3y^2 = k$?

6. Hallar e identificar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia del punto $(6, 0)$ es siempre igual al doble de au distancia de la recta $2x - 3 = 0$. *Sol.* $3x^2 - y^2 = 27$.

7. Hallar los puntos de intersección de la recta $2x - 9y + 12 = 0$ con las asíntotas de la hipérbola $4x^2 - 9y^2 = 11$. *Sol.* $(3, 2)$ $(-3/2, 1)$

8. Se llama *hipérbola equilátera* una hipérbola de la forma

$$x^2 - y^2 = a^2 \tag{16}$$

   a) Comprobar que la excentricidad de una hipérbola equilátera es igual a $\sqrt{2}$.

   b) Demostrar que el producto de las distancias de cualquier punto de una hipérbola equilátera a sus asíntotas es una constante.

9. Los vertices de una hipérbola son los puntos $(-1, 3)$ y $(3, 3)$, y su excentricidad es $\frac{3}{2}$. Hallar la ecuación de la hipérbola, las coordenadas de sus focos, y las longitudes de cada lado recto. *Sol.* $\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-3)^2}{5} = 1$. $(4, 3)$, $(-2, 3)$. 5.

10. Para cada una de las siguientes ecuaciones, para las correspondientes a hipérbolas: escribirlas en las forma (8) o (11), determinar las coordenadas del centro, vertices y focos; su excentricidad y las ecuaciones de sus asíntotas.

    a) $x^2 - 9y^2 - 4x + 36y - 41 = 0$ b) $4x^2 - 9y^2 + 32x + 36y + 64 = 0$ c) $x^2 - 4y^2 - 2x + 1 = 0$

    Sol. a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1$. Centro $(2, 2)$. Vértices $(5, 2)$ y $(-1, 2)$. Focos $(2 \pm \sqrt{10}, 2)$. Excentricidad $\frac{\sqrt{10}}{3}$. Asíntotas $x + 3y - 8 = 0$, $x - 3y + 4 = 0$. c) No es una hipérbola. Son dos rectas concurrentes: $x \pm 2y - 1 = 0$.

11. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la hipérbola $x^2 - 2y^2 + 4x - 8y - 6 = 0$ que son paralelas a la recta $4x - 4y + 11 = 0$. *Sol.* $x - y \pm 1 = 0$.

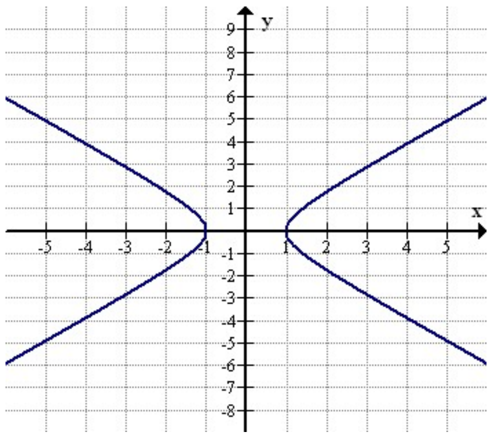
12. Dibujar las siguientes hipérbolas y hallar sus puntos de intersección: $x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0$ y $3x^2 - 4y^2 + 3x + 16y - 18 = 0$. *Sol.* $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(-2, 1)$, $(-2, 3)$.

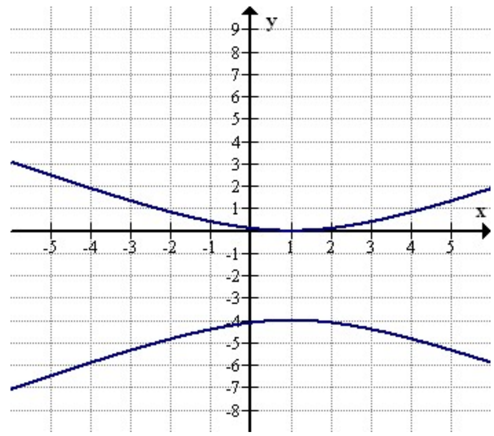
13. Verificar gráficamente que la curva $xy = 1$ corresponde a una hipérbola.

14. Comprobar que la elipse $9x^2 + 16y^2 = 144$ y la hipérbola $3x^2 - 4y^2 = 12$ tienen los mismos focos.

15. Hallar los puntos de intersección de la circunferencia $x^2 + y^2 - 9 = 0$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$. *Sol.* (2,35, 1,86), (−2,35, 1,86), (2,35, −1,86), (−2,35, −1,86) (valores redondeados a dos decimales).

16. Determinar las ecuaciones de las siguientes hipérbolas:





Sol. $x^2 - y^2 = 1$, $4x^2 - 8x - 9y^2 - 36y + 4 = 0$

17. A partir de la definición de la hipérbola obtener su gráfico en el software Geogebra.