

¿Cómo podemos explicar que las matemáticas, un producto de la mente humana independiente de la experiencia, encajen tan bien en los objetos y elementos de la realidad?.

Albert Einstein.

1. ¿Qué es un Modelo matemático (MM)?

1.1. ACTIVIDAD 1

Expresar, con sus palabras, lo que entiende por modelo matemático.

1.2. Algunas explicaciones

1. La Modelación Matemática es un proceso de elegir características que describen adecuadamente un problema de origen no matemático, para llegar a colocarlo en un lenguaje matemático. La Modelación es un proceso iterativo en que una etapa de validación frecuentemente lleva a diferencias entre las predicciones basadas en el modelo y la realidad. *Tim O'Shea, John Berry, 1982.*
2. El modelaje es el arte de aplicar las matemáticas a la vida real. *Mogen Niss, 1991.*
3. Un modelo matemático es una estructura matemática que describe aproximadamente las características de un fenómeno concreto. *Frank Swetz, 1992.*
4. La Modelación matemática es un proceso dinámico de búsqueda de modelos adecuados, que sirvan de prototipos de alguna situación. *Rodney Bassanezi, 1994.*
5. Un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que traducen, de alguna forma, un fenómeno particular o un problema de la realidad *Maria Salett Biembengut, 1998.*
6. La habilidad de modelamiento implica *traducir* una situación del mundo real a la matemática *Blum, 2012.*

2. ACTIVIDAD 2

Luego de lo anterior, ajustar, de ser necesario, lo que entiende por modelo matemático.

2.1. Algunas consideraciones

La representación en términos matemáticos de una situación problemática (SP) de la realidad (generalmente, simplificada) recibe el nombre de *modelo matemático* (MM), de dicha situación.

Algunas consideraciones importantes son:

- El MM es una idealización de la SP. Un MM no representa, el general, completamente la situación en cuestión, sino que éste intenta representar sus aspectos más importantes y *posibles*.
- En un buen modelo, la realidad se simplifica lo suficiente para permitir los cálculos matemáticos, pero incluso así, debe ser lo suficientemente preciso como para poder permitir conclusiones valiosas.
- Es importante tener siempre presente las limitaciones del modelo.
- La importancia del MM es que permite abordar con herramientas matemáticas el estudio de la SP, facilitando su análisis y el establecimiento de eventuales conclusiones.

Un modelo matemático se puede representar, como es de suponer, usando cualquier contexto matemático, es decir, puede usar una o más expresiones matemáticas: ecuaciones, sistemas de ecuaciones, desigualdades, funciones, etc.

3. Fases de la modelación matemática



Esquema general del proceso de modelación

4. Ejemplos de modelos

4.1. Ejemplo 1: Alumbrado público



El consejo municipal ha decidido poner un reflector en un pequeño parque triangular de manera que éste ilumine todo el parque. ¿Dónde debería ubicarse el reflector?

Este problema¹, de carácter social, se puede resolver a través de la modelación matemática:

- Se parte de un problema del mundo real: *Establecer la ubicación óptima para un reflector en un parque.*
- Se formula el problema en términos de conceptos matemáticos: El parque se puede representar como un triángulo, y la iluminación como un círculo con el reflector en el centro.
- Gradualmente se abstrae de la realidad a través de procesos tales como hacer supuestos sobre cuáles aspectos del problema son importantes, la generalización del problema y su formalización (estos permiten transformar el problema real en un problema matemático que representa la situación en forma fehaciente). El problema se convierte *en ubicar el centro de un círculo que circunscribe el triángulo.*
- Se resuelve el problema matemático: basándose en el hecho de que el centro de un círculo que circunscribe un triángulo yace en el punto de intersección de las mediatrices del triángulo.
- Se hace conciencia de la solución matemática en términos de la situación real. Relacionar este hallazgo con el parque real. Reflexionar sobre la solución y reconocer, por ejemplo, que si una de las tres esquinas del parque fuera un ángulo obtuso, esta solución no funcionaría, pues el reflector quedaría por fuera del parque. Reconocer que la localización y tamaño de los árboles del parque son otros factores que afectan la utilidad de la solución matemática.

¹Marcos teóricos de PISA 2003. <http://www.oecd.org/pisa/39732603.pdf>

4.2. Ejemplo 2: Un problema de mezclas

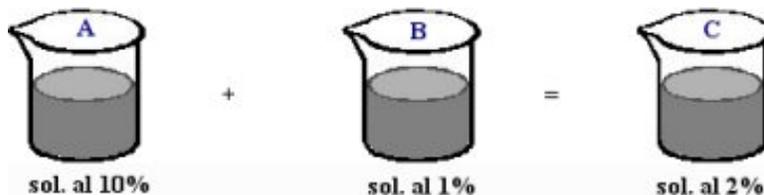
Buscar un modelo matemático para la siguiente situación-problema relacionada con mezclas.

Un farmacéutico debe preparar 15ml de gotas especiales para un paciente con glaucoma. La solución debe tener 2% de ingrediente activo, pero sólo tiene disponibles soluciones al 10% y al 1%. ¿Qué cantidad de cada solución debe usar para completar la receta?

Solución:

Sea x = cantidad de ml de la solución al 10%

Para ayudar a entender el problema, se realiza un esquema, como el siguiente.



	A	B	C
Cantidad de ml en cada caso	x	$15 - x$	15
Cantidad de ingrediente activo en cada caso	$0,1x$	$0,01(15 - x)$	$0,02 \cdot 15$

Luego, el modelo de la situación planteada es la siguiente ecuación:

$$0,1x + 0,01(15 - x) = 0,02 \cdot 15$$

4.3. Ejemplo 3: Un problema de optimización

Buscar un modelo matemático para la siguiente situación-problema relacionada con fabricación de joyas.

Un Joyero fabrica dos tipos de joyas: joyas tipo A y joyas tipo B . Cada joya tipo A se hace con 1g de oro y 2g de plata y se vende a \$25. Las joyas de tipo B se vende a \$30 y lleva 2g de oro y 1g de plata. Si tiene que fabricar por lo menos 20 joyas tipo A y 30 tipo B , y solo se dispone de 750g de cada metal. ¿Cuántas joyas de cada tipo se deben fabricar para obtener el máximo ingreso?

Solución:

1. **Asignación de variables**

x = Número de joyas fabricadas del tipo A

y = Número de joyas fabricadas del tipo B

2. **Función Objetivo:** $I = 25x + 30y$

3. **Restricciones:**

$$x + 2y \leq 750$$

$$2x + y \leq 750$$

$$x \geq 20$$

$$y \geq 0$$

Luego el modelo matemático es el siguiente problema de Programación lineal:

Maximizar $I = 25x + 30y$

Sujeto a:

$$x + 2y \leq 750$$

$$2x + y \leq 750$$

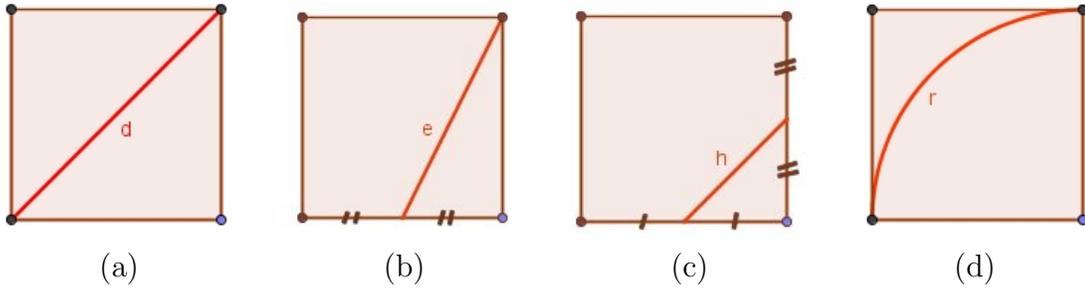
$$x \geq 20$$

$$y \geq 30$$

5. Modelos funcionales

5.1. Area de un cuadrado

Determinar el modelo funcional que representa el área de un cuadrado de lado a en término de las variables indicadas en cada uno de los siguientes dibujos:



Solución (elegir 2)

5.2. Área de un cuadrado

Expresar el área A de un cuadrado en función de su perímetro P .

**5.3. Perímetro de un cuadrado**

Expresar el perímetro P de un cuadrado en función de su área A .

**5.4. Área de un triángulo**

Expresar el área A de un triángulo equilátero en función de la longitud s de uno de sus lados.



6. Actividades

1. Pagando una cuota



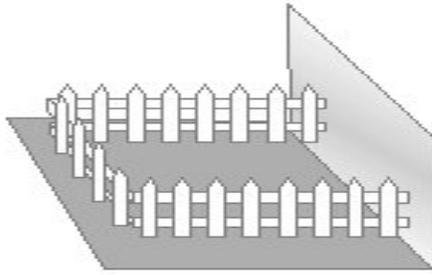
Un grupo de n amigos acordaron cenar juntos. Algunos de ellos invitaron a su pareja y así se juntaron 3 personas más. Festearon y algunos tuvieron que irse, porque al siguiente día debían trabajar muy temprano, así que cuando debían pagar la cuenta, que ascendía a \$125.000, ya se habían ido 7 personas de las que se reunieron. ¿Si todos los que estaban entonces cooperaron en partes iguales para pagar la cuenta, determinar el modelo que determina cuánto de más pagó cada uno, considerando que algunos que también consumieron ya se habían ido y debían cooperar?

2. Valor de un estacionamiento



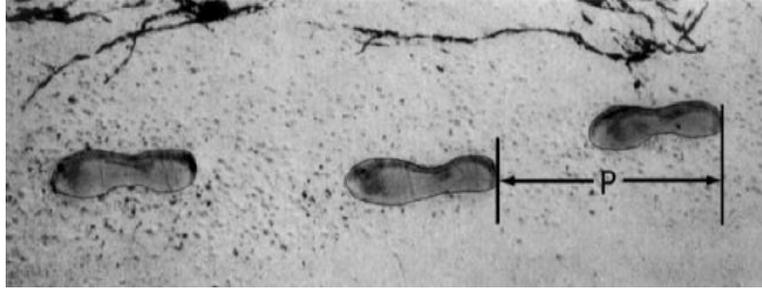
Un estacionamiento en la ciudad cobra \$400 por la primera hora y \$500 por cada hora adicional. Encontrar el modelo matemático que representa el valor de estacionamiento en término del número de horas estacionadas.

3. Cercando un terreno



Un lote rectangular va a cercarse en tres de sus lados. Si el área del lote es de 30 metros cuadrados, exprese la longitud de la cerca como una función de la longitud del lado no cercado.

4. Longitud de un paso

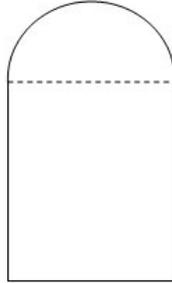


La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso P es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$ da una relación aproximada entre n y P donde n es el número de pasos por minuto, y P la longitud del paso en metros.

Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, determinar el modelo matemático que permite encontrar la longitud del paso de Enrique.

5. Una ventana normanda (ver figura), que consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo, tiene un perímetro total de 10 metros. Expresar su área en función de la base x del rectángulo.



Ventana Normanda



6. La piscina mostrada en la figura tiene 2m de profundidad mínima y 6m de profundidad máxima, 40m de largo, 20m de ancho y el fondo es un plano inclinado. Expresar el volumen V del agua contenida en la piscina en función de la altura h del nivel del agua desde la parte más profunda de la piscina.

