1. Definición y nociones básicas

Definición 1.1 *Una matriz de orden $m \times n$ con coeficientes reales, es un arreglo rectangular de números reales, con m filas y n columnas*

$$A = A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

Observación 1.1

1. Las líneas horizontales de una matriz se denominan filas y las verticales columnas. Una matriz con m filas y n columnas es referida como una matriz de $m \times n$ (de m por n). Por ejemplo, la siguiente es una matriz de 3×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & -3 & 7 \\ -1 & 5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

2. Es usual designar una matriz por una letra mayúscula: $A, B, C, \dots$

3. Una matriz de orden $m \times n$, tal que cada elemento ubicado en la fila i, columna j, se denota por a_{ij}

$$f_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} \qquad c_i(A) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix}$$

4. Se trabajará con matrices cuyos elementos son números reales o complejos. Es decir, el conjunto de la matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ lo anotamos $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Si $m = n$ entonces las matrices se dicen **cuadradas** de orden n o bien $n \times n$ y el conjunto de todas ellas se denota por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si los coeficientes son números reales entonces denotamos $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ o simplemente $\mathcal{M}_n$.

5. El elemento a_{ij} de la matriz $A = (a_{ij})$ está ubicado en la fila i y columna j de A. Este elemento corresponde a la entrada i, j de A, o bien, a la componente i,j de la matriz A.

Ejemplo 1.1 *Sean*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 9 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

son matrices con entradas reales.

Ejemplo 1.2

a) Encontrar la matriz A, sabiendo que $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ dada por $a_{ij} = \begin{cases} (-1)(i+j) & \textbf{si } i+j > 2 \\ 0 & \textbf{si } i+j \leq 2 \end{cases}$

b) Determinar la matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ dada por $a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i-j}{i+j} & \textbf{si } i+j > 3 \\ 0 & \textbf{si } i+j \leq 3 \end{cases}$

Definición 1.2 *Sean* $A = (a_{ij})$ *y* $B = (b_{ij})$ *dos matrices de orden* $m \times n$*.*

$$A = B \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall\, i \in 1, 2, \ldots, m, \forall\, j \in 1, 2, \ldots, n$$

O bien,

Dos matrices $A_{m\times n}$ *y* $B_{p\times q}$ *se dice que son iguales si y sólo si* $m = p$ *,* $n = q$ *y con* $i = 1, \ldots, m$*;* $j = 1, \ldots, n$ *;*

Ejemplo 1.3

1. Notemos en el ejemplo siguiente, las matrices dadas son distintas:
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

2. Hallar a, b, c y d constantes reales, en cada caso, tales que

   a) $\begin{bmatrix} a^2 + 2a & -1 \\ b & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 + a & 2 \end{bmatrix}$.

   b) $\begin{bmatrix} a^2 + 2a + b & -1 \\ a + b + c & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + 1 & 2c \\ 6 & d \end{bmatrix}$.

Definición 1.3 (Matriz nula) *La matriz de orden* $m \times n$ *cuyos elementos son todos cero se denomina matriz nula o matriz cero y se denota por* $\mathbb{O}_{m\times n}$*, o simplemente por* $\mathbb{O}$*.*

2. Operaciones con matrices

1. **Adición de matrices:**

   Sean $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ dos matrices de orden $m \times n$. La suma entre A y B, denotada $A + B$ es la matriz de orden $m \times n$, definida por:

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

   Ejemplo 2.1 *Sean* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & -7 \end{bmatrix}$

   Entonces $A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+(-3) & 4+(-4) \\ -1+(-1) & 7+0 & 1+(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

2. **Multiplicación de un escalar por una matriz.**

   Sea λ un número y sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$. El producto del escalar λ por A, denotado $\lambda \cdot A$ es la matriz de orden $m \times n$, definida por:

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

   En particular si $\lambda = -1$ y $A = (a_{ij})$ entonces $(-1) \cdot A = (-a_{ij})$, denotada por $-A$.

   Ejemplo 2.2

   Solución: Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix}$. Entonces $2 \cdot A = 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 0 \\ 4 & -12 & 2 \end{bmatrix}$

3. **Multiplicación de matrices.**

   Sean $A = (a_{ij})$ matriz de orden $m \times \mathbf{n}$ y $B = (b_{ij})$ matriz de orden $\mathbf{n} \times s$ con elementos o entradas reales. El producto de las matrices A y B, es la matriz de orden $m \times s$, denotado $A \cdot B$, definido por:

   $A \cdot B = C = (m_{ij})$, donde $C = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ para todo $i \in 1, 2, \ldots, m$, $j \in 1, 2, \ldots, s$

Por lo tanto, una regla sencilla para multiplicar matrices es la siguiente:

$$\begin{array}{cccccc} \text{Matriz} & A & \cdot & B & = & C \\ \text{orden} & m\times \boxed{\text{n}} & & \boxed{\text{n}}\times s & & m\times s \end{array}$$

a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} x & t & p \\ y & u & q \\ z & w & r \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} ax+by+cz & at+bu+cw & ap+bq+cr \\ dx+ey+fz & dt+eu+fw & dp+eq+fr \end{bmatrix}_{2\times 3}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 4} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 2 & -3 \\ 0 & 7 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 4} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2}$ **No** está definido. Justifique.

d) Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Determinar una matriz $X \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ tal que:

$$2A + X - BC = 0_{2\times 3}$$

e) Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 10-3\sqrt{2} \\ 3 & 20+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 7 \\ 1+2\sqrt{2} & -3+\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Nota: El producto entre matrices no es conmutativo: es decir, AB no es igual a BA en general.

Propiedades 2.1

Sean A, B y C matrices de orden $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$.

a) Asociatividad: $A + (B + C) = (A + B) + C$.

b) Conmutatividad: $A + B = B + A$.

c) Elemento neutro: $A + 0 = A = 0 + A$, donde 0 es la matriz nula de orden $m \times n$.

d) Inverso aditivo: $-A$ es de orden $m \times n$, es la matriz inversa aditiva de A, tal que: $A + (-A) = 0 = (-A) + A$.

e) Elemento neutro: $1 \cdot A = A$, donde 1 es el elemento unidad de $\mathbb{R}$.

f) $\alpha \cdot 0_{m\times n} = 0_{m\times n}; \quad 0 \cdot A = 0_{m\times n}$

Sean A una matriz de orden $m \times n$ y B una matriz de orden $n \times s$.

a) Asociatividad: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$, para toda matriz C de orden $s \times r$.

b) *Paseo del escalar*: $\lambda \cdot (A \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

c) Distributividad: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$, para toda matriz C de orden $n \times s$.

d) $A \cdot 0_{n\times s} = 0_{m\times s}$.

Definición 2.1 (Transpuesta de una matriz) *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $m \times n$. La matriz transpuesta de A, denotada A^t es la matriz de orden $n \times m$ cuyas columnas son las filas de A (en el mismo orden).*

Ejemplo 2.3

a) Sea $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \end{bmatrix} \Longrightarrow A^t = \begin{bmatrix} a & e & i \\ b & f & j \\ c & g & k \\ d & h & l \end{bmatrix}$

b) Sea $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & -9 & 3 \\ -3 & 4 & 5 & 7 \end{bmatrix} \Longrightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & -6 & 4 \\ 0 & -9 & 5 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

Propiedades 2.2

a) $(A^t)^t = A$, para toda matriz A de orden $m \times n$.

b) $(A + B)^t = A^t + B^t$, para toda matriz A y B de orden $m \times n$.

c) $(\lambda \cdot A)^t = \lambda \cdot A^t$, para todo escalar λ y A de orden $m \times n$.

d) $(A \cdot B)^t = B^t A^t$, para toda matriz A de orden $m \times n$ y B de orden $n \times s$.

Definición 2.2 (Inversa de una matriz) *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz de orden n. Si existe una matriz de orden n, denotada por A^{-1}, tal que*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

dicha matriz, A^{-1}, recibe el nombre matrzi inversa de A. Cuando una matriz tiene inversa, se dice invertible.

Nota: Más adelante analizaremos:

1. qué condición debe cumplir una matriz para ser invertible.
2. diferentes métodos para encontrar la inversa de un matriz, cuando exista.

Propiedades 2.3

Sean A y B matrices invertibles

a) $(A^{-1})^{-1} = A$

b) AB es invertible y su inversa es:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

c) $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}, \quad k \neq 0$

d) $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$