1. Matrices Cuadradas

Definición 1.1 (Matrices Cuadradas) *Una matriz A es una matriz cuadrada de orden n, si y sólo si, A es de orden $n \times n$, es decir, A tiene n filas y n columnas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Observación 1.1

$a)$ La adición y la multipicación de matrices cuadradas del mismo orden, están bien definidas.

$b)$ Existen matrices cuadradas $A \neq 0, B \neq 0$ tal que $A \cdot B = 0$.

$c)$ a_{ii}; $i = 1, \dots, n$, se denominan elementos diagonales (o diagonal principal de A).

$d)$ A es una matriz diagonal si y sólo si los elementos no diagonales son nulos: $i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$e)$ Una matriz es escalar si y sólo si es diagonal y todos los elementos diagonales son iguales entre sí.

$$a_{ij} = \begin{cases} a & \forall \ i = j \\ 0 & \forall \ i \neq j \end{cases}$$

$f)$ Una matriz es triangular inferior si y sólo si los elementos por encima de la diagonal son nulos:

$i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

g) Una matriz es triangular superior si y sólo si los elementos por debajo de la diagonal son nulos:

$i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0.$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

h) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es idempotente si y sólo si $A^2 = A$.

i) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es nilpotente si y sólo si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m = O$.

j) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es simétrica si y sólo si $A^t = A$.

k) $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ es antisimétrica si y sólo si $A^t = -A$.

l) A es ortogonal, si y sólo si, $A^t \cdot A = I_n = A \cdot A^t$.

m) $A^2 = A \cdot A, A^3 = A \cdot A \cdot A$, etc.

Definición 1.2 (Traza de una Matriz)

La traza de la matriz A, denotada $tr(A)$ es la suma de los elementos de la diagonal de A. Es decir:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Propiedades 1.1

a) $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$

b) $tr(k \cdot (A + B)) = k \cdot tr(A) + k \cdot tr(B)$

c) $tr(AB) = tr(BA)$

d) $tr(k \cdot A) = k \cdot tr(A)$

Definición 1.3 (Matriz identidad)

La matriz identidad de orden n, o matriz unidad de orden n, denotada I_n, es la matriz diagonal tal que cada elemento de la diagonal principal es 1.

$$I_n = (a_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Ejemplo 1.1

a) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$

Propiedades 1.2

a) $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$, para toda matriz cuadrada A de orden n.

b) $tr(I_n) = n$

2. Rango de una matriz

Definición 2.1 (Matrices Escalonadas)

Sea A una matriz con m filas y n columnas, con elementos reales. A es **matriz escalonada**, si y sólo si, A es de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} \dots & a_{1j_1} & \dots & \dots & & & & & & & & a_{1n} \\ \dots & 0 & \dots & 0 & a_{2j_2} & \dots & & & & & & \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & a_{3j_3} & \dots & \dots & & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & a_{r\,j_r} & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

siendo $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ los primeros elementos $\neq 0$, de las r primeras filas no-nulas, tal que $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.
Las filas NULAS, si es que existen, se encuentran en la parte inferior de la matriz.
Los elementos $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \dots, a_{rj_r}$ de la matriz escalonada A se llaman *elementos distinguidos* de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

son matrices escalonadas.

Definición 2.2 (Matriz reducida por filas)

Sea A una matriz de orden $m \times n$. A es una matriz **reducida por filas**, si y sólo si, A es escalonada, cada elemento distinguido de la matriz A es 1, y en cada columna donde se encuentre un elemento distinguido los elementos restantes de esa columna son 0.

Operaciones Elementales Filas

Sea A una matriz con m filas y n columnas (de orden $m \times n$).

1. *Operación tipo (1)*: **Intercambiar dos filas**.

   Notación: E_{ik} es la operación que *intercambia las filas i, k de A.*

$$A = \begin{pmatrix} \texttt{fila 1} \\ \texttt{fila 2} \\ \vdots \\ \texttt{fila i} \\ \vdots \\ \boxed{\texttt{fila k}} \\ \vdots \\ \texttt{fila m} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{ik}]{} \begin{pmatrix} \texttt{fila 1} \\ \texttt{fila 2} \\ \vdots \\ \boxed{\texttt{fila k}} \\ \vdots \\ \texttt{fila i} \\ \vdots \\ \texttt{fila m} \end{pmatrix} = A'$$

   Ejemplo 2.1

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 2 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{E_{12}} \quad \begin{bmatrix} 1 \quad -1 \quad 0 \quad 2 \\ \boxed{-1 \quad 2 \quad 2 \quad 3} \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \end{bmatrix}$$

2. *Operación tipo (2)*: **Multiplicar una fila de A por un número λ distinto de cero.**

   Notación: $E_{i(\lambda)}$ con $\lambda \neq 0$

$$A = \begin{pmatrix} \texttt{fila 1} \\ \texttt{fila 2} \\ \vdots \\ \boxed{\texttt{fila i}} \\ \vdots \\ \texttt{fila m} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_i(\lambda)]{} \begin{pmatrix} \texttt{fila 1} \\ \texttt{fila 2} \\ \vdots \\ \boxed{\lambda \cdot \texttt{(fila i)}} \\ \vdots \\ \texttt{fila m} \end{pmatrix} = A''$$

Ejemplo 2.2

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ \boxed{1 \quad -1 \quad 0 \quad 2} \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_2(3)]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ \boxed{3 \quad -3 \quad 0 \quad 6} \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. *Operación tipo (3)*: **Sumar a una fila k, un múltiplo α de otra fila i.**
   Notación: $E_{ik}(\alpha)$

$$A = \begin{pmatrix} \texttt{fila 1} \\ \texttt{fila 2} \\ \vdots \\ \texttt{fila i} \\ \vdots \\ \boxed{\texttt{fila k}} \\ \vdots \\ \texttt{fila m} \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{ik}(\alpha)]{} \begin{pmatrix} \texttt{fila 1} \\ \texttt{fila 2} \\ \vdots \\ \texttt{fila i} \\ \vdots \\ \boxed{\alpha \cdot \texttt{fila i+ fila k}} \\ \vdots \\ \texttt{fila m} \end{pmatrix} = A'''$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 2 \quad 2 \quad 3} \\ \boxed{1 \quad -1 \quad 0 \quad 2} \\ 1 \quad 0 \quad -1 \quad 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}(3)]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ \boxed{-1 \cdot 3 + 1 \quad 2 \cdot 3 + -1 \quad 2 \cdot 3 + 0 \quad 3 \cdot 3 + 2} \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ \boxed{-2 \quad 5 \quad 6 \quad 11} \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Notación: Si $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, y B se obtiene desde la matriz A efectuando sobre ésta la operación elemental E entonces anotamos:

$$A \overset{E}{\to} B \quad \text{o bien} \quad A \overset{E}{\sim} B$$

Ejemplo 2.3

Escalonar la siguiente matriz A, utilizando operaciones elementales fila.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ -3 & 2 & -8 & -1 \\ -1 & 3 & -5 & -1 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \underset{E_1(-1)}{\overset{E_{13}}{\sim}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 5 & 1 \\ -3 & 2 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \underset{E_{14}(-6)}{\overset{E_{12}(3),\, E_{13}(-2)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 7 & 2 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 25 & -25 & -4 \end{bmatrix} \overset{E_2(-\frac{1}{7})}{\sim}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 5 & -5 & 4 \\ 0 & 25 & -25 & -4 \end{bmatrix} \underset{E_{24}(-25)}{\overset{E_{23}(-5)}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{38}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{7} \end{bmatrix} \overset{E_3(\frac{7}{38})}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{22}{7} \end{bmatrix} \overset{E_{34}(-\frac{22}{7})}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Definición 2.3 (Matrices equivalentes)

Sean A y B dos matrices de orden $m{\times}n$. Se dice que A y B son **equivalentes por filas**, si y sólo si, realizando un número finito de operaciones elementales filas sucesivas sobre A se obtiene la matriz B.

Nota: Se denotará $A \equiv B$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} = B$$

Luego, A es equivalente por filas con la matriz B, es decir $A \equiv B$.

a) Realizando operaciones elementales filas sobre una matriz A, se puede obtener una matriz escalonada U tal que $A \equiv U$. Notar que U no es única.

b) Si U_1 y U_2 son dos matrices escalonadas tales que $A \equiv U_1$ y $A \equiv U_2$, entonces:

N° de filas no-nulas de U_1 **=** N° de filas no-nulas de U_2

Definición 2.4 (Rango de una matriz)

Sea A una matriz de orden $m \times n$, y sea U una matriz escalonada tal que $A \equiv U$.
El **rango** de la matriz A, denotado $\rho(A)$, es el número de filas no-nulas de la matriz U.

$$\boxed{\rho(A) = \text{ Número de filas no-nulas de } U}$$

Ejemplo 2.4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{E_{12}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{E_{23}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego $\rho(A) = 2$.

Sean A y B matrices de orden $m \times n$.

a) Si $A \equiv B$, entonces $\rho(A) = \rho(B)$. El recíproco no se cumple.

b) Si $A \equiv B$, entonces $B \equiv A$

Ejemplo 2.5

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & a \\ -3 & a & -2a \end{bmatrix}$ determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que el rango de A sea 2.

Ejemplo 2.6

1. Encontrar la matrix X, tal que satisfaga la ecuación

$$(A + X^t \cdot B^{-1})^t = A \cdot B \qquad (*)$$

   donde:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

   Sugerencia: Primero despejar la matriz X en $(*)$.

2. Deduzca una fórmula para C^n, con $n \in \mathbb{N}$, donde $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$