

1. Sistemas de ecuaciones lineales

El objetivo general de este tema es discutir y resolver sistemas de ecuaciones lineales, haciendo abstracción del tipo de problemas que origina su planteamiento. Discutir un sistema consiste en averiguar si tiene o no tiene solución y, caso de tenerla, saber si es única o si no lo es.

Resolver un sistema es calcular su solución (o soluciones). Los casos más sencillos (2 ecuaciones con 2 incógnitas, 3 ecuaciones con 3 incógnitas ...). También podemos considerar el caso general.

Caso general **Sistema de m ecuaciones con n incógnitas**. Es un conjunto de expresiones algebraicas de la forma:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & d_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & d_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & d_n \end{array}$$

1. x_j son las incógnitas, $(j = 1, \dots, n)$
2. a_{ij} son los coeficientes, $(i = 1, 2, \dots, m) ; (j = 1, 2, \dots, n)$
3. d_i son los términos independientes, $(i = 1, 2, \dots, m)$.

Observación 1.1

1. La relación entre los números m y n pueden ser cualesquiera: $m > n$, $m = n$ ó $m < n$
2. Los escalares a_{ij} y c_i son números reales
3. El escalar a_{ij} es el coeficiente de x_j en la i -ésima ecuación
4. Cuando n es pequeño, es usual designar a las incógnitas con las letras $x, y, z, t, \dots$
5. Obsérvese que el número de ecuaciones no tiene por qué ser igual al número de incógnitas
6. Cuando $d_i = 0$ para todo i , el sistema se llama **homogéneo**

1.1. Sistema de ecuaciones lineales 3×3

Sistema de dos ecuaciones lineales con coef. $\mathbb{R}$, en tres variables x, y, z

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

a) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3$: coeficientes del sistema

b) d_1, d_2, d_3 : constantes del sistema

Observación 1.2

1. El terna ordenada (x_0, y_0, z_0) es una solución del sistema $\iff$ satisface cada ecuación del sistema.
2. Resolver el sistema, significa: determinar todos los pares ordenados $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, que satisfacen simultáneamente cada una de las ecuaciones del sistema.
3. Conjunto solución del sistema:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y, z) \text{ es solución del sistema}\}$$

4. Geométricamente, resolver el sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables con coeficientes reales en $\mathbb{R}^3$, significa determinar el o los puntos de intersección de tres planos del espacio.

Nota: Dos sistemas de ecuaciones en la misma cantidad de variables son **equivalentes** $\iff$ tienen exactamente el mismo conjunto solución.

Definición 1.1 (Tipos de sistemas (Discusión de sistemas)) Podemos clasificar los sistemas atendiendo al número de sus solución(es):

1. **Incompatible:** No tiene solución $\iff S = \emptyset$
2. **Compatible:** Tiene solución $\iff S \neq \emptyset$
 - Compatible determinado: exactamente una solución, o
 - Compatible indeterminado: infinitas soluciones.

Ejemplo 1.1

1. $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 8, \end{cases}$ Incompatible $\implies$ **No** tiene solución
2. $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 1, \end{cases}$ Compatible determinado $\implies$ **única** solución
3. $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6, \end{cases}$ Compatible indeterminado $\implies$ **infinitas** soluciones

1.2. Forma matricial de un SEL

SEL de tres ecuaciones y tres variables

■ **Forma Usual:**
$$\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{array}$$

■ **Forma matricial:**
$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

■ **Matriz aumentada:**
$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array} \right]$$

Ejemplo 1.2 Hallar la matriz aumentada de el SEL

$$\begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ x + y + z = -1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

SEL formado por m ecuaciones lineales en n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\left[\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right] (*)$$

Presentación matricial del SEL (*)

$A \cdot X = b$, siendo:

■ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ Matriz de los coeficientes del sistema

■ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vector de las variables

$$\blacksquare \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{vector de las constantes}$$

Matriz aumentada del SEL

$$(A \mid b) = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Forma matricial de un SEL

Ejemplo 1.3

Dado el sistema
$$\begin{array}{l} x + 2y + z = 2 \\ 3x + y - 2z = 1 \\ 4x - 3y - z = 3 \end{array}$$

1. Matriz de los coeficientes del sistema:
$$\begin{array}{c} \text{coef de } x \quad \text{coef de } y \quad \text{coef de } z \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right) \end{array}$$

2. Matriz aumentada del sistema:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Definición 1.2 (SEL equivalentes) Dos SEL con la mismas variables son equivalentes, si y sólo si, tienen el mismo conjunto solución.

Nota: Para resolver un SEL, es usual transformarlo en otro SEL equivalente **más simple** de resolver.

1.3. Métodos de eliminación para resolver SEL

Método 1: El **método de eliminación de Gauss** consiste en transformar un sistema de ecuaciones A , a otro B , aplicando operaciones elementales, de tal forma que B queda en una forma triangular y por lo tanto puede ser resuelto con despejes sucesivos simples.

$$\begin{array}{cccccccc}
 a'_{11}x_1 & + & a'_{12}x_2 & + & a'_{13}x_3 & + & \dots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
 & & a'_{22}x_2 & + & a'_{23}x_3 & + & \dots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
 & & & & a'_{33}x_3 & + & \dots & + & a'_{3n}x_n & = & b'_3 \\
 & & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & & a'_{mn}x_n & = & b'_n
 \end{array}$$

Como se sabe un SEL puede tener una única solución, puede no tener soluciones, o tener más de una solución (infinitas). El Método de Gauss nos permite saber en cual de estos casos está un SEL.

1. En el caso de obtener un SEL equivalente al original, donde tengamos el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y podamos despejar a todas las incógnitas. Entonces el sistema tiene una única solución.
2. En el caso de obtener un SEL equivalente al original, donde obtengamos una contradicción, es decir, una ecuación falsa. Entonces el sistema no tiene solución.
3. En caso de obtener un SEL equivalente al original, donde obtengamos más incógnitas que ecuaciones. Entonces el sistema tiene más de una solución (infinitas). La resta del número de variables menos el número de ecuaciones se llama **número de variables libres**.

Método 2: El **método de eliminación de Gauss-Jordan** consiste en transformar un sistema de ecuaciones A, a otro B, por medio de operaciones elementales, de tal forma que B queda en forma diagonal y por lo tanto la solución queda de manera directa.

$$\begin{array}{cccccccc}
 a'_{11}x_1 & & & & & & & & = & b'_1 \\
 & a'_{22}x_2 & & & & & & & = & b'_2 \\
 & & a'_{33}x_3 & & & & & & = & b'_3 \\
 & & & \ddots & & & & & \vdots & \\
 & & & & & a'_{mn}x_n & & & = & b'_n
 \end{array}$$

Observación 1.3

Los próximos ejemplos se realizarán utilizando el método de Gauss, se deja de ejercicio al lector realizarlos con el método de Gauss-Jordan.

Nota:

1. Dos matrices A y B del mismo orden son equivalentes (por filas) cuando B se puede obtener de A realizando sobre A una secuencia finita de operaciones elementales filas.

2. Sea A una matriz de orden $m \times n$. Realizando operaciones elementales filas sobre la matriz A , se puede obtener una matriz escalonada U , equivalente con A :

$$A \xrightarrow{\text{Operación } \vec{1}} B \xrightarrow{\text{Operación } \vec{2}} \dots \xrightarrow{\text{operación } \vec{s}} U$$

Sistemas de ecuaciones lineales y Operaciones elementales filas

Sea $A \cdot X = b$ un sistema de ecuaciones lineales, y sea $(A | b)$ la matriz aumentada del sistema. Realizando operaciones elementales filas sobre la matriz aumentada $(A | b)$ de un SEL, se puede obtener una matriz escalonada $(\hat{A} | \hat{b})$.

$$(A | b) \xrightarrow{\text{Operación } \vec{1}} \dots \xrightarrow{\text{Operación } \vec{2}} \dots \xrightarrow{\text{operación } \vec{s}} (\hat{A} | \hat{b})$$

siendo $(\hat{A} | \hat{b})$ escalonada.

El sistema de ecuaciones lineales $(\hat{A} | \hat{b})$, es equivalente al SEL original.

Ejemplo 1.4

Usando el método de eliminación de Gauss y el método de eliminación de Gauss-Jordan, resolver el siguiente SEL:

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 2 \\ 3x + y - 2z & = & 1 \\ 4x - 3y - z & = & 9 \end{array}$$

Respuesta: $S = \{(2, -1, 2)\}$.

Ejemplo 1.5

Tres compuestos se combinan para formar tres tipos de aleaciones. Una unidad de la aleación del Tipo I requiere 10 kg del compuesto A, 30 kg del B y 60 kg del compuesto C. Una unidad del tipo II requiere 20 kg de A, 30 kg del B y 50 kg del C. Una unidad del tipo III requiere 50 kg del A y 50 kg del C. Si hay disponibles 1600 kg del A, 1200 kg del B y 3200 del C. ¿Cuántas unidades de los tres tipos de aleación se pueden producir si se usa el material químico disponible?

Sugerencia: Seguir los siguientes pasos:

- Asignación de variables
- Relaciones algebraicas entre las variables
- Sistema de ecuaciones
- Determinar una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada:

- e) Formar el SEL asociado a la matriz escalonada recién obtenida Este sistema es equivalente al sistema original.
- f) Resolver este sistema equivalente
El conjunto solución del sistema dado es $S = \{(20, 20, 20)\}$.
- g) Entregar la respuesta