1. Clasificación de los SEL:

Consideremos el SEL formado por m ecuaciones lineales en n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right| \quad (*)$$

donde :

1. A es la matriz de los coeficientes.
2. $(A \mid b)$ es la matriz aumentada del sistema.

Nota: En la matriz escalonada $(A \mid b)$ puede existir o nó una fila de la forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array} \right) \text{ donde } c \neq 0$$

1. Cuando en la matriz escalonada $(A \mid b)$ existe una fila de la forma $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array} \right)$, con $c \neq 0$, el sistema $(*)$ es **inconsistente**. En este caso $S = \emptyset$.
2. Cuando en la matriz escalonada $(A \mid b)$ **NO existe** una fila de la forma $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & c \end{array} \right)$, con $c \neq 0$, el sistema es consistente.

Teorema 1.1 (Rouché-Frobenius)

1. El sistema $(*)$ es consistente $\iff \rho(A) = \rho(A \mid b)$
   a) El sistema $(*)$ es **consistente con solución única** $\iff \rho(A) = \rho(A \mid b) = n =$ número de variables
   b) El sistema $(*)$ es **consistente con infinitas soluciones** $\iff \rho(A) = \rho(A \mid b) < n$
2. El sistema $(*)$ es **inconsistente** $\iff \rho(A) < \rho(A \mid b)$

1.1. Resolusción de SEL: Método de eliminación de Gauss

Ejemplo 1.1 *Resolver el sistema* $\left.\begin{array}{rcl} 3x + y - z &=& 5 \\ 2x + 4y + 3z &=& 2 \\ x - 3y - 4z &=& 3 \end{array}\right|$

- $\boxed{\text{Paso 1}}$ Matriz aumentada del sistema: $\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & 3 \end{array}\right]$

- $\boxed{\text{Paso 2}}$ Determinar una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_{13}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_{13}(-3) \\ E_{12}(-2) \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 10 & 11 & -4 \\ 0 & 10 & 11 & -4 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_{23}(-1)}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 10 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = U$$

Luego: $\rho(A) = \rho(A|b) = 2 < 3 = n$ número de variables $\Longrightarrow$ El sistema es **consistente con infinitas soluciones**.

- $\boxed{\text{Paso 3}}$ Formar el SEL asociado a la matriz escalonada(U):

$$\begin{array}{l} \text{Ec(1)} \\ \text{Ec(2)} \\ \text{Ec(3)} \end{array} \quad \left.\begin{array}{rcl} x - 3y - 4z &=& 3 \\ 10y + 11z &=& -4 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right|$$

Este sistema es **consistente con infinitas soluciones**.

- $\boxed{\text{Paso 4}}$ Resolviendo este sistema (por ejemplo, se resolverá en términos de z) se obtiene:

  - de la ecuación 2: $y = -\dfrac{4 + 11z}{10}$
  - reemplazando en la ecuacion 1: $x = \dfrac{7z + 18}{10}$

  Luego, el conjunto solución del sistema dado es

$$S = \left\{ \left(\frac{7z + 18}{10}, \ -\frac{4 + 11z}{10}, \ z \right) \quad \text{tal que} \quad z \in \mathbb{R} \right\}$$

Algunas soluciones particulares del sistema:

$$z = 0 \Longrightarrow y = -\frac{2}{5}, \quad x = \frac{9}{5} \Longrightarrow \left(\frac{9}{5}, \ -\frac{2}{5}, \ 0 \right)$$
$$z = 1 \Longrightarrow y = -\frac{3}{2}, \quad x = \frac{5}{2} \Longrightarrow \left(\frac{5}{2}, \ -\frac{3}{2}, \ 1 \right)$$

Ejercicio 1.1 *Resolver el sistema* $\left.\begin{array}{rcl} x + y - z &=& 1 \\ 2x + 2y + z &=& -2 \\ x - y - 5z &=& 1 \\ 3x + y - 4z &=& -1 \end{array}\right|$

Respuesta: $\rho(A) = \rho(A \mid b) = 3$. Luego el sistema es consistente con solución única: $z = -\frac{4}{3}$, $y = \frac{8}{3}$, $x = -3$. Luego, $S = \left\{ \left(-3, \ \frac{8}{3}, \ -\frac{4}{3} \right) \right\}$

Ejercicio 1.2 *Resolver el sistema* $\left.\begin{array}{rcl} x + y + z - w &=& 2 \\ 2x - y + w &=& 5 \\ 3x + z + w &=& 1 \\ 2x + 2y + 2z - w &=& 3 \end{array}\right|$

Respuesta: $3 = \rho(A) < \rho(A \mid b) = 4 \Longrightarrow$ El sistema es inconsistente.

Observación 1.1

Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son aquellos en los que todas las constantes son 0. Estos sistemas son siempre consistentes, y su conjunto solución se puede encontrar usando el método de Gauss.

$$\left.\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \ldots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}\right|$$

Observación 1.2

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (S.E.L.H), **SIEMPRE** tiene la solución $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Llamada <u>solución trivial</u>.

Ejemplo 1.2 *Resolver el sistema* $\left.\begin{array}{rcl} 2x - 3y + z &=& 0 \\ x + y - z &=& 0 \\ 4x + 2y + 3z &=& 0 \end{array}\right|$

- $\boxed{\text{Paso 1}}$ Este SEL tiene 3 ecuaciones lineales, y 3 variables.

  Matriz aumentada del sistema: $\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$

- $\boxed{\text{Paso 2}}$ Determinar una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_{12}(-1)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_{12}(-2) \\ E_{13}(-4) \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_{32}(-3)}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_{21}(-1) \\ E_{23}(2) \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_2\left(-\frac{1}{29}\right)} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_{32}(18) \\ E_{31}(-17) \\ \sim \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = U$$

Luego: $\rho(A) = \rho(A \mid b) = 3 \Longrightarrow$ El sistema es **consistente con solución única**.

- $\boxed{\text{Paso 3}}$ Formar el SEL asociado a la matriz escalonada(U):

$$\begin{array}{l} \text{Ec}(1) \\ \text{Ec}(2) \\ \text{Ec}(3) \end{array} \left.\begin{array}{ccc} x & & = 0 \\ & y & = 0 \\ & & z = 0 \end{array}\right|$$

Este sistema es **consistente con solución única**.

- $\boxed{\text{Paso 4}}$ Resolviendo este sistema se obtiene: $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ **(Solución trivial)**
Luego, $S = \{(0, 0, 0)\}$

2. Análisis de S.E.L

Ejemplo 2.1

Analizar los valores de m tal que el sistema $\left.\begin{array}{l} 2x + my = m - 1 \\ mx + 8y = m + 2 \end{array}\right|$ sea

a) Consistente con solución única.

b) Consistente con infinitas soluciones.

c) Inconsistente.

<u>**Solución:**</u>

- $\boxed{\text{Paso 1}}$ Matriz aumentada del sistema: $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & m & m-1 \\ m & 8 & m+2 \end{array}\right]$

- $\boxed{\text{Paso 2}}$ Aplicando operaciones elementales filas:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & m & m-1 \\ m & 8 & m+2 \end{array}\right] \underset{\sim}{E_{12}\left(-\frac{m}{2}\right)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & m & m-1 \\ 0 & \dfrac{16-m^2}{2} & \dfrac{-m^2+3m+4}{2} \end{array}\right] \underset{\sim}{E_2(-2)} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & m & m-1 \\ 0 & m^2-16 & m^2-3m-4 \end{array}\right]$$

- $\boxed{\text{Paso 3}}$ Valores de m importantes para el estudio
    - $m^2 - 16 = 0 \Longrightarrow m = 4, m = -4$
    - $m^2 - 3m - 4 = 0 \Longrightarrow m = 4, m = -1$

- $\boxed{\text{Paso 4}}$ Análisis de los valores de m:

    a) Para $m \neq \pm 4$ el S.E.L tiene **solución única**.
    b) Para $m = 4$ el S.E.L tiene **infinitas soluciones**.
    c) Para $m = -4$ el S.E.L es **inconsistente**.

Ejercicio 2.1 *Analizar los valores de k tal que el sistema* $\left.\begin{array}{r} x + ky = 5 \\ kx + 2ky = 1 \end{array}\right|$ *sea*

a) Consistente con solución única.

b) Consistente con infinitas soluciones.

c) Inconsistente.

Respuesta:

a) Para $k \neq 0$, $k \neq 2$ el S.E.L tiene solución única.

b) No existen valores de k tal que el sistema sea consistente con infinitas soluciones.

c) Para $k = 0$, $k = 2$ el S.E.L es inconsistente.

Ejercicio 2.2 *Analizar los valores de k tal que el sistema* $\left.\begin{array}{r} x + 3y + z = 5 \\ 2x + 5y + kz = 8 \\ 3x + ky - 5z = -1 \end{array}\right|$ *sea*

a) Consistente con solución única.

b) Consistente con infinitas soluciones.

c) Inconsistente.

Respuesta:

a) Para $k \neq 1$, $k \neq 10$ el S.E.L tiene solución única.

b) Para $k = 1$ el S.E.L tiene es consistente con infinitas soluciones.

c) Para $k = 10$ el S.E.L es inconsistente.

Ejercicio 2.3 Considerar el siguiente SEL:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & z & = & 2K \\ 4x & + & 2Ky & - & 5z & = & 4 \\ (2K-2)x+ & & 2y & & +2K^2z & = & 2K^2 \\ -2x & & +(2-2K)y+ & & 6z & = & M \end{array}\right|$$

$a)$ Resolver el sistema para $K = 0$, $M = -4$.

$b)$ Analizar los valores de K y M tal que el sistema sea:

- consistente con solución única.
- consistente con infinitas soluciones
- inconsistente

Respuesta:

$a)$ Para $K = 0$ y $M = -4$
$S = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3} \right\}$

$b)$ Análisis de los valores de K y M

- Para $K \neq 2, K \neq -\frac{3}{2}$ y $M = 2K - 4$, el SEL tiene solución única.

  Para $K \neq 2, K \neq -\frac{3}{2}$ y $M \neq 2K - 4$, el SEL es inconsistente.
- Para $K = 2$ y $M = 0$, el SEL tiene infinitas soluciones.

  Para $K = 2$ y $M \neq 0$, el SEL es inconsistente.
- Para $K = -\frac{3}{2}$ y para todo M, el SEL es inconsistente.

1. Considerar el siguiente SEL:

$$\left.\begin{array}{rcl} x - 3y - 4z &=& 3 \\ ax + 3y - az &=& 0 \\ x + 3ay - 10z &=& b \end{array}\right|$$

Analizar los valores de a y b tal que el sistema sea:

a) consistente con solución única. (de ser posbile encuentre la solución)

b) consistente con infinitas soluciones

c) inconsistente