

1. Clasificación de los S.E.L:

Consideremos el SEL formado por m ecuaciones lineales en n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right| (*)$$

donde :

1. A es la matriz de los coeficientes.
2. $(A \mid b)$ es la matriz aumentada del sistema.

Nota: En la matriz escalonada $(A \mid b)$ puede existir o no una fila de la forma:

$$(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c) \text{ donde } c \neq 0$$

1. Cuando en la matriz escalonada $(A \mid b)$ existe una fila de la forma $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c)$, con $c \neq 0$, el sistema $(*)$ es **inconsistente**. En este caso $S = \emptyset$.
2. Cuando en la matriz escalonada $(A \mid b)$ **NO existe** una fila de la forma $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid c)$, con $c \neq 0$, el sistema es consistente.

Teorema 1.1 (Rouche-Frobenius)

1. El sistema (*) es consistente $\iff \rho(A) = \rho(A \mid b)$

a) El sistema (*) es **consistente con solución única** $\iff$

$$\rho(A) = \rho(A \mid b) = n = \text{número de variables}$$

b) El sistema (*) es **consistente con infinitas soluciones** $\iff$

$$\rho(A) = \rho(A \mid b) < n$$

2. El sistema (*) es **inconsistente** $\iff$

$$\rho(A) < \rho(A \mid b)$$

2. Ejemplos claves

Ejemplo 2.1 Resolver el sistema

$$\begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & 5 \\ 2x + 4y + 3z & = & 2 \\ x - 3y - 4z & = & 3 \end{array}$$

- **Paso 1** Matriz aumentada del sistema: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & 3 \end{array} \right]$
- **Paso 2** Determinar una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada.

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & -4 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{13}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 10 & 11 & -4 \\ 0 & 10 & 11 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{23}(-1)} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -4 & 3 \\ 0 & 10 & 11 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = U \end{array}$$

Luego: $\rho(A) = \rho(A|b) = 2 < 3 = n$ número de variables $\implies$ El sistema es **consistente con infinitas soluciones**.

- **Paso 3** Formar el SEL asociado a la matriz escalonada(U):

$$\begin{array}{rcl} \text{Ec}(1) & x - 3y - 4z & = 3 \\ \text{Ec}(2) & 10y + 11z & = -4 \\ \text{Ec}(3) & 0 & = 0 \end{array}$$

Este sistema es **consistente con infinitas soluciones**.

- **Paso 4** Resolviendo este sistema (por ejemplo, se resolverá en términos de z) se obtiene:

- de la ecuación 2: $y = -\frac{4 + 11z}{10}$
- reemplazando en la ecuación 1: $x = \frac{7z + 18}{10}$

Luego, el conjunto solución del sistema dado es

$$S = \left\{ \left(\frac{7z + 18}{10}, -\frac{4 + 11z}{10}, z \right) \quad \text{tal que} \quad z \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejemplo 2.2 Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = -2 \\ x - y - 5z = 1 \\ 3x + y - 4z = -1 \end{array} \right.$$

- **Paso 1** Este SEL tiene 4 ecuaciones lineales, y 3 variables.

Matriz aumentada del sistema:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \end{array} \right]$$

- **Paso 2** Determinar una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -5 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{E_{12}(-2) \\ E_{13}(-1) \\ E_{14}(-3)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -4 \end{array} \right] & \xrightarrow{E_{34}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{array} \right] & \xrightarrow{\substack{E_{24}(-1) \\ E_{23}}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = U \end{aligned}$$

Luego: $\rho(A) = \rho(A | b) = 3 \implies$ El sistema es **consistente con solución única**.

- **Paso 3** Formar el SEL asociado a la matriz escalonada(U):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ec}(1) \quad x + y - z = 1 \\ \text{Ec}(2) \quad -2y - 4z = 0 \\ \text{Ec}(3) \quad 3z = -4 \\ \text{Ec}(4) \quad 0 = 0 \end{array} \right.$$

Este sistema es **consistente con solución única**.

- **Paso 4** Resolviendo este sistema se obtiene: $z = -\frac{4}{3}, y = \frac{8}{3}, x = -3$

Luego, $S = \left\{ \left(-3, \frac{8}{3}, -\frac{4}{3} \right) \right\}$

Ejemplo 2.3 Resolver el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y + z - w = 2 \\ 2x - y \quad \quad + w = 5 \\ 3x \quad \quad + z + w = 1 \\ 2x + 2y + 2z - w = 3 \end{array} \right.$$

- **Paso 1** Este SEL tiene 4 ecuaciones lineales, y 4 variables.

Matriz aumentada del sistema:
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

- **Paso 2** Determinar una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada.

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{E_{12}(-2) \\ E_{13}(-3) \\ E_{14}(-2) \\ \sim \\ E_{34}(-1) \\ \sim}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{23}(-1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right] \\ & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \right] = U \end{aligned}$$

Luego: $3 = \rho(A) < \rho(A \mid b) = 4 \implies$ El sistema es **inconsistente**.

Observacion 2.1

Los sistemas de ecuaciones lineales homogéneos son aquellos en los que todas las constantes son 0. Estos sistemas son siempre consistentes, y su conjunto solución se puede encontrar usando el método de Gauss.

$$\begin{array}{cccccccc|c} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Observacion 2.2

Un sistema de ecuaciones lineales homogéneo (S.E.L.H), **SIEMPRE** tiene la solución $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Llamada solución trivial.

Ejemplo 2.4 Resolver el sistema

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 4x + 2y + 3z = 0 \end{array}$$

- **Paso 1** Este SEL tiene 3 ecuaciones lineales, y 3 variables.

Matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right]$$

- **Paso 2** Determinar una matriz escalonada equivalente a la matriz aumentada.

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{E_{12}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{13}(-4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}(-3)} \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{23}(2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -17 & 0 \\ 0 & 1 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -29 & 0 \end{array} \right] = U \end{aligned}$$

Luego: $\rho(A) = \rho(A | b) = 3 \implies$ El sistema es **consistente con solución única**.

$$S = \{(0, 0, 0)\}$$

3. Análisis de S.E.L

Ejemplo 3.1 Analizar los valores de k tal que el sistema
$$\begin{array}{rcl} x + 3y + z & = & 5 \\ 2x + 5y + kz & = & 8 \\ 3x + ky - 5z & = & -1 \end{array}$$
 sea

- a) Consistente con solución única.
- b) Consistente con infinitas soluciones.
- c) Inconsistente.

Solución:

- Paso 1 Matriz aumentada del sistema: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & k & 8 \\ 3 & k & -5 & -1 \end{array} \right]$
- Paso 2 Aplicando operaciones elementales filas:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & k & 8 \\ 3 & k & -5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{13}(-3)]{E_{12}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & k-2 & -2 \\ 0 & k-9 & -8 & -16 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{23}(k-9)} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & k-2 & -2 \\ 0 & 0 & k^2 - 11k + 10 & -2k + 2 \end{array} \right]$$

- Paso 3 Valores de k importantes para el estudio
 - $k^2 - 11k + 10 = 0 \implies k = 1, k = 10$
 - $-2k + 2 = 0 \implies k = 1$
- Paso 4 Análisis de los valores de k :
 - a) Para $k \neq 1, k \neq 10$ el S.E.L tiene **solución única**.
 - b) Para $k = 1$ el S.E.L tiene es consistente con **infinitas soluciones**.
 - c) Para $k = 10$ el S.E.L es **inconsistente**.

Ejemplo 3.2 Considerar el siguiente SEL:

$$\begin{array}{rclclcl} 2x & + & 2y & + & z & = & 2K \\ 4x & + & 2Ky & - & 5z & = & 4 \\ (2K-2)x & + & 2y & + & 2K^2z & = & 2K^2 \\ -2x & + & (2-2K)y & + & 6z & = & M \end{array}$$

- a) Resolver el sistema para $K = 0$, $M = -4$.
- b) Analizar los valores de K y M tal que el sistema sea:
- consistente con solución única.
 - consistente con infinitas soluciones
 - inconsistente

Solución:

- a) Para $K = 0$ y $M = -4$

$$S = \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{2}{3} \right\}$$

- b) Análisis de los valores de K y M

Para $K \neq 2$, $K \neq -\frac{3}{2}$ y $M = 2K - 4$, el SEL tiene solución única.

Para $K \neq 2$, $K \neq -\frac{3}{2}$ y $M \neq 2K - 4$, el SEL es inconsistente.

Para $K = 2$ y $M = 0$, el SEL tiene infinitas soluciones.

Para $K = 2$ y $M \neq 0$, el SEL es inconsistente.

Para $K = -\frac{3}{2}$ y para todo M , el SEL es inconsistente.

7. Considerar el siguiente SEL:

$$\begin{array}{l} x - 3y - 4z = 3 \\ ax + 3y - az = 0 \\ x + 3ay - 10z = b \end{array}$$

Analizar los valores de a y b tal que el sistema sea:

- a) consistente con solución única. (de ser posible encuentre la solución)
- b) consistente con infinitas soluciones
- c) inconsistente