1. Introducción

Los sistemas de ecuaciones aparecen en el modelamiento de múltiples y variados problemas de aplicación de la matemática.

Los problemas más importantes en esta temática son la *existencia* y *unicidad* de soluciones.

En álgebra lineal son muchos los problemas que pueden ser reducidos a la determinación de existencia o unicidad de algún sistema de ecuaciones lineales.

A medida que aumenta el número de variables y ecuaciones involucradas los métodos clásicos para resolver sistemas de ecuaciones lineales, empiezan a ser lentos e incómodos de aplicar. En este punto es donde los software de propósitos matemáticos adquieren una importancia decisiva.

1.0.1. Ejemplo 1: Juntando monedas

Mi pasatiempo es juntar monedas de diez pesos y de cincuenta pesos. En estos momentos tengo el doble de monedas de diez que de monedas de cincuenta. Si tuviera 4 monedas más de diez y tres monedas menos de cincuenta, tendría \$44760. ¿Cuántas monedas de 10 y cuántas de 50 tengo?

1.1. Ejemplo 2: Fracciones parciales

Determinar los valores de los parámetros a, b y c, de modo que:

$$\frac{1+x^2+2x^2}{(x+1)(x^2+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+2}$$

1.2. Ejemplo 3: Buscando un número

Si la suma de las cifras de las decenas y la cifra de las unidades de un número es 17, y si a este número se le resta 9, las cifras se invierten.

1.3. Ejemplo 4: Un problema de distribución

Una compañía maderera tiene un contrato con una distribuidora local para proveerles de madera de tres variedades: A (lodgepole pine), B (spruce) y C (Douglas fir). Mensualmente debe entregar, de la primera variedad $1000m^3$, de la segunda $800m^3$ y de la última $600m^3$. La compañía maderera dispone de tres regiones plantadas con las variedades de maderas solicitadas. En la siguiente tabla se detalla, por región, los porcentajes disponibles de cada variedad (densidad), junto al volumen total de madera disponible por hectárea.

Región	Vol/Há(en m³)	A (en %)	B (en %)	C (en %)
Oeste	330	70	20	10
Norte	390	10	60	30
Este	290	5	20	75

¿Cuántas hectáreas se deben cortar en cada región para entregar exactamente el volumen requerido de cada variedad de madera?

2. Ecuación Lineal

Una **ecuación lineal** en las *variables* (o *incógnitas*) $x_1, x_2, ..., x_n$ es una ecuación de la forma:

$$\boxed{a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b} \qquad (1)$$

donde los coeficientes $a_1, a_2, ...a_n$ y b son números reales.

Observación:

1. Esta ecuación se denomina lineal, pués todos sus términos son de primer grado.
2. El coeficiente b, usualmente se denomina **término independiente** o **constante** de la ecuación. Cuando b es 0, la ecuación lineal se llama **homogénea**.
3. La ecuación lineal (1) recibe el nombre de **degenerada** cuando todos los coeficientes de las incógnitas son iguales a 0, es decir, cuando tiene la forma:

$$\boxed{0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b} \qquad (2)$$

Ejemplo: La siguiente es una ecuación lineal con 3 variables:

$$3x - 4y + 5z = 6 \qquad (3)$$

3. Solución de una ecuación lineal

Una **solución** de la ecuación lineal (1) es una sucesión de números reales $s_1, s_2, ..., s_n$, los cuales al sustitu¡rse respectivamente por $x_1, x_2, ..., x_n$ en (1) se obtiene una igualdad verdadera. Generalmente, dicha solución se anota vectorialmente de la siguiente manera:

$$s = (s_1, s_2, ..., s_n)$$

El conjunto S de todas las soluciones se llama **conjunto solución** de la ecuación. S puede describirse as¡:

$$S = \{\, s = (s_1, s_2, ..., s_n) \in \mathbb{R}^n \,/\, s \text{ es una solución de } (1) \,\}$$

Cuando el conjunto solución de la ecuación (1) es no vacío, la ecuación se dice **consistente**. En caso contrario se dice **inconsistente**

Ejemplo:
Una solución de la ecuación del ejemplo precedente es $x = 2$, $y = 0$, $z = 0$, o bién $s = (2, 0, 0)$. ¿Dicha ecuación tiene más soluciones?. En caso afirmativo enumerar algunas.

Ejercicio: Hacer un estudio completo de las soluciones de la ecuación $ax = b$.

Para ello establecer las condiciones que deben satisfacer a y b para que el sistema tenga

1. *una* solución,
2. *ninguna* solución, o
3. *infinitas* soluciones.

Nota: Del ejercicio precedente, se puede concluir que, en general, una ecuación lineal, puede tener *una*, *infinitas* o *ninguna* solución.

La ecuación del ejemplo tiene infinitas soluciones. Estas generalmente se describen de la siguiente manera:

1. Se elige una variable con coeficiente no nulo, generalmente la primera que cumple esta condición. En lo sucesivo llamaremos a esta variable **primera variable**.
2. Se asignan valores arbitrarios a todas las variables restantes (llamadas **variables libres**). Dichos valores arbitrarios se denominan **parámetros**.
3. En función de los parámetros se despeja la *primera variable*.

Ejemplo: En el ejemplo (3), si se asignan los parámetros s y t a las variables y y z respectivamente, al despejar, en función de los pará metros la primera variable x se obtiene $x = \dfrac{6+4s-5t}{3}$. Por lo tanto, *todas* las soluciones de esta ecuación quedan descritas por las relaciones:

$$\begin{aligned} x &= \frac{6+4s-5t}{3} \\ y &= s \\ z &= t \end{aligned}$$

Luego, estas relaciones describen la solución general de la ecuación.
El conjunto solución de esta ecuación se puede presentar de las siguientes maneras:

$$S = \left\{ (x, s, t) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = \frac{6+4s-5t}{3} \right\}$$

o bién,

$$S = \left\{ \left(\frac{6+4s-5t}{3}, s, t\right) \in \mathbb{R}^3 \,/\, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Ejercicio: Hacer un estudio de las soluciones de una ecuación degenerada.

Ejercicio:

1. Plantear una ecuación lineal con 4 variables y resolverla.
2. Determinar 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas de modo que $x = 1$, $y = -3$ $z = 4$, es decir, $s = (1, -3, 4)$ pertenezca al conjunto solución de ellas.
3. Determinar, en caso que exista, una solución común a las siguientes ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x - y + z &= 3x + 5y \\ 2x + y - z &= x + z \end{aligned}$$

4. Ecuaciones lineales con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas puede escribirse:

$$\boxed{ax + by = c} \qquad (2)$$

con $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$

Observación:

1. Como cada solución de (2) es un par de números reales $s = (s_1, s_2)$, se tiene que cada solución de (2) determina un punto en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

2. Suponiendo que la ecuación (2) no es degenerada, todas sus soluciones corresponden a los puntos de una línea recta. Dicha recta recibe el nombre de **gráfico** de la ecuación (2).

3. A modo de ejemplo, en la siguiente figura se entrega el gráfico de la ecuación lineal $2x + y = 4$

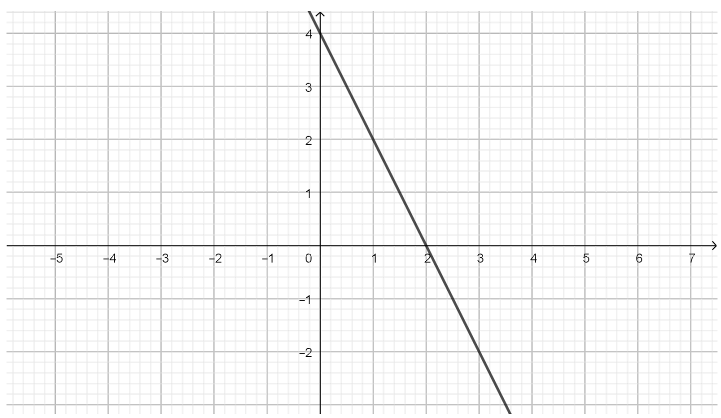

Gráfico de la ecuación $2x + y = 4$

Ejercicio:

1. Dada la ecuación lineal $3x - 2y = 1$.

   a) Decidir cuáles de los siguientes puntos son soluciones de ella: $(-1, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 7)$

   b) Usando $\boldsymbol{GGB}$ obtener el gráfico de esta ecuación.

   c) Usando el gráfico obtenido, determinar aproximadamente algunas soluciones de esta ecuación.

2. Considerar las siguientes ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcr} x+y &=& 8 \\ 2x+4y &=& 18 \end{array}\right| \qquad \begin{array}{c} (A) \\ (B) \end{array}$$

a) Usando **GGB** obtener, en un mismo sistema cartesiano, los gráficos de estas ecuaciones.

b) Por inspección visual de los gráficos obtenidos, determinar aproximadamente, en caso que exista, una solución común a las ecuaciones (A) y (B)

c) ¿Cuántos métodos conoce usted para encontrar algebraicamente la solución común de las ecuaciones (A) y (B)?. Use uno de ellos, para determinar *exactamente* la solución común a las ecuaciones (A) y (B).

4.1. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Como nuestro propósito es estudiar sistemas generales de ecuaciones lineales, en esta subsección revisaremos con cierto detalle el caso más simple: *sistemas de dos ecuaciones lineales (no degeneradas) con dos incógnitas*. Usando las variables x e y para las incógnitas, el formato general del sistema que estudiaremos es:

$$\left.\begin{array}{l} a_1x \ + \ b_1y = c_1 \\ a_2x \ + \ b_2y = c_2 \end{array}\right| \quad (3)$$

Observación:

1. Una par de números reales $s = (s_1, s_2)$ que cumple ambas ecuaciones se denomina **solución del sistema (3)**. El conjunto de todas las soluciones del sistema (3) se denomina **conjunto solución**.

2. Dos sistemas del tipo (3) se dicen **equivalentes** cuando ambos tienen el *mismo* conjunto solución.

3. Como el gráfico de una ecuación lineal es una línea recta, el conjunto solución del sistema (3), tiene la particularidad de tener una interpretación geométrica simple. En efecto, desde este punto de vista en la resolución del sistema (3) se presentan tres casos:

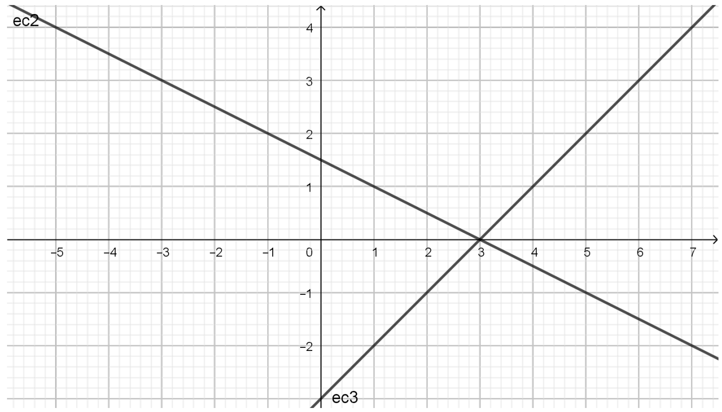

Figura 1: *Gráfico de las ecuaciones* $x + 2y = 3$ *y* $x - y = 3$

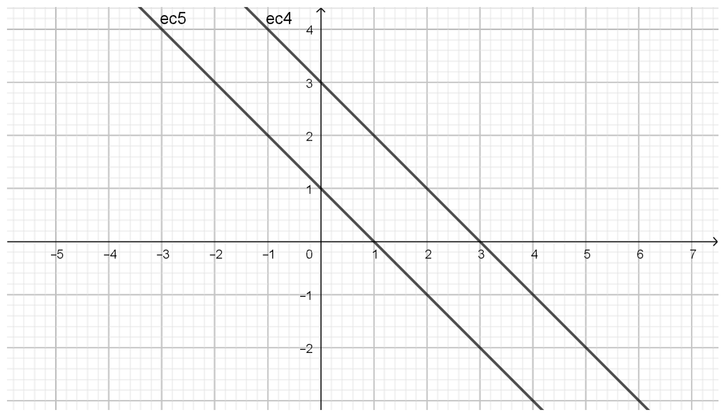

Figura 2: *Gráfico de las ecuaciones* $x + y = 3$ *y* $x + y = 1$

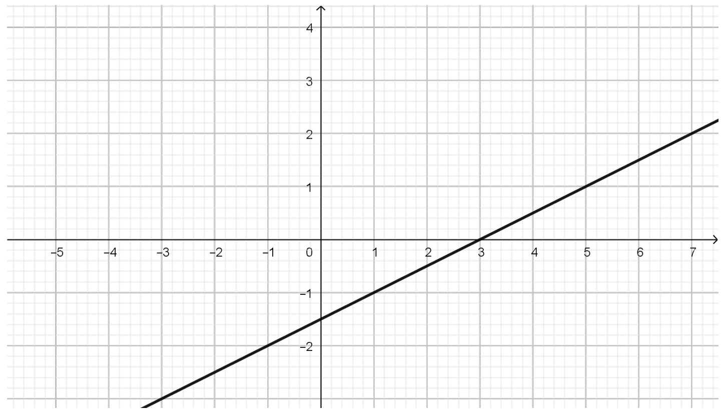

Figura 3: *Gráfico de las ecuaciones* $x - 2y = 3$ *y* $2x - 4y = 6$

- El sistema (3) tiene exactamente **una solución**. En este caso los gráficos de las ecuaciones lineales se cortan en un punto, que corresponde justamente a la solución del sistema. Ver Figura 1.
- El sistema **no tiene solución**. En este caso los gráficos de las ecuaciones lineales corresponden a dos rectas paralelas. Ver Figura 2.
- El sistema tiene un **número infinito de soluciones**. Aquí los gráficos son rectas que coinciden. Ver Figura 3.

4. Las tres situaciones con respecto al conjunto solución del sistema (3) quedan caracterizadas algebraicamente, en el siguiente teorema.

4.2. Métodos de solución para un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

1. **Método de igualación**.

   Este método consiste en despejar una incógnita en las dos ecuaciones, y a continuación igualarlas.

   Ejercicio: Plantear un SEL de 2×2 y resolverlo usando este método.

2. **Método de sustitución** Este método consiste en despejar en una ecuación una de las dos incógnitas para sustituirla en la otra ecuación.

   Ejercicio: Plantear un SEL de 2×2 y resolverlo usando este método.

3. **Método de eliminación**

   Este método, que luego se extenderá a sistemas más generales con el nombre de *Algoritmo de eliminación de Gauss*, en el sistema (3) consiste en los siguientes pasos:

Paso 1 Sumar un múltiplo (no nulo) de la primera ecuación a la segunda de modo que una de las incógnitas se elimine.

Paso 2 Resolver la ecuación obtenida para la variable que corresponda y luego sustituir su valor encontrado en la primera ecuación para determinar el valor de la otra incógnita.

Al aplicar el **Paso 1** recién indicado pueden presentarse tres casos:

Caso 1 La ecuación resultante es del tipo $ay = b$ con $a \neq 0$. En tal caso, el sistema es consistente y *tiene una única solución*.

Caso 2 La ecuación resultante es del tipo $0y = 0$. En este caso el sistema es consistente y *tiene infinitas soluciones*.

Caso 3 La ecuación resultante es del tipo $0y = b$ con $b \neq 0$. En este caso el sistema es inconsistente.

Ejercicio: Usando el método de eliminación resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$(a)\quad \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 3y & = & 1 \\ 5x & + & 7y & = & 3 \end{array}$$

$$(b)\quad \begin{array}{rcrcr} 2x & + & 4y & = & 10 \\ 3x & + & 6y & = & 15 \end{array}$$

$$(c)\quad \begin{array}{rcrcr} 4x & - & 2y & = & 5 \\ -6x & + & 3y & = & 1 \end{array}$$

4. **Regla de Cramer**. Postergado.
5. **Solución por métodos matriciales**. Postergado

Teorema: El sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1x \ + \ b_1y & = & c_1 \\ a_2x \ + \ b_2y & = & c_2 \end{array}\right|$$

tiene:

- una única solución cuando $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$,
  o bién cuando $\dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$.
- ninguna solución cuando $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$
- infinitas soluciones cuando $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

4.3. Resolución del sistema del tipo (3) usando GGB

Usando ***GGB***, y una aplicación bajada desde Play Store, resolver el siguiente SEL:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 7 \\ 2x & + & 4y & = & 18 \end{array}\right|$$

Ejercicio:
Proponer 3 SELs (uno con solución única, otro con infinitas soluciones y otro sin soluciones) con 2 ecuaciones y 2 incógnitas y resolverlos usando ***GGB*** y la aplicación bajada de Play Store.

5. Un desafío

Hacer un estudio completo de las soluciones de un sistema de 3×2, es decir de 3 ecuaciones con 2 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_1x & + & b_1y = c_1 \\ a_2x & + & b_2y = c_2 \\ a_3x & + & b_3y = c_3 \end{array}\right|$$