1. Dadas la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Determinar A^{-1}

   b) Calcular A^{128}

   c) Resolver la ecuación $(X + A + A^t)^t = (A^t \cdot A)^{-1}$

Solución:

$$a)\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$b)\ A^{128} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c)\ X = \begin{pmatrix} 25 & -27 & 7 \\ -27 & 27 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. **¿Verdadero falso?**

   Sea A, B y C matrices de 3×3

   a) Si A tiene 2 filas iguales, entonces $det(A) = 0$

   b) Si $A^2 = 0_{3x3}$, entonces $A = 0_{3x3}$

   c) Si $AB = AC$, entonces $B = C$

Respuesta:

$a)$ Verdadero

$b)$ Falso

$c)$ Falso

3. Sea $A = \begin{pmatrix} m & 1 & -3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{pmatrix}$

   a) Determinar los valores de m, si es que existen, tal que A es invertible.

   b) Para $m = 0$, calcular A^{-1}

Respuesta:

a) Calculando el determinante tenemos que:

$$\begin{vmatrix} m & 1 & -3 \\ 1 & m & 2 \\ 1 & m & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + 2 - 3m + 3m - 2m^2 - 3 = m^2 - 1$$

Por lo que A es invertible para $m^2 - 1 \neq 0$,es decir , $m \neq \pm 1$

b) Para $m = 0$ te tenemos que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, luego aplicando operaciones elementales tenemos que:

$$(A \mid I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{12}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{E_{13}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{E_{32}(3), E_{31}(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Luego

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Un problema sobre asignación de recursos**

Una bióloga colocó tres cepas de bacterias (denominadas I, II y III) en un tubo de ensayo, donde se alimentarán de tres diferentes fuentes alimenticias (A, B y C). Cada día, 2300 unidades de A, 800 unidades de B y 1500 unidades de C se colocan en el tubo de ensayo y cada bacteria consume cierto número de unidades de cada alimento por día, como se muestra en la siguiente tabla. ¿Cuántas bacterias de cada cepa pueden coexistir en el tubo de ensayo y consumir todo el alimento?

	Bacteria cepa I	Bacteria cepa II	Bacteria cepa III
Alimento A	2	2	4
Alimento B	1	2	0
Alimento C	1	3	1

Respuesta:

Sean x, y y z los números de bacterias de las cepas I, II y III, respectivamente.

El SEL que modela la situación planteada es:

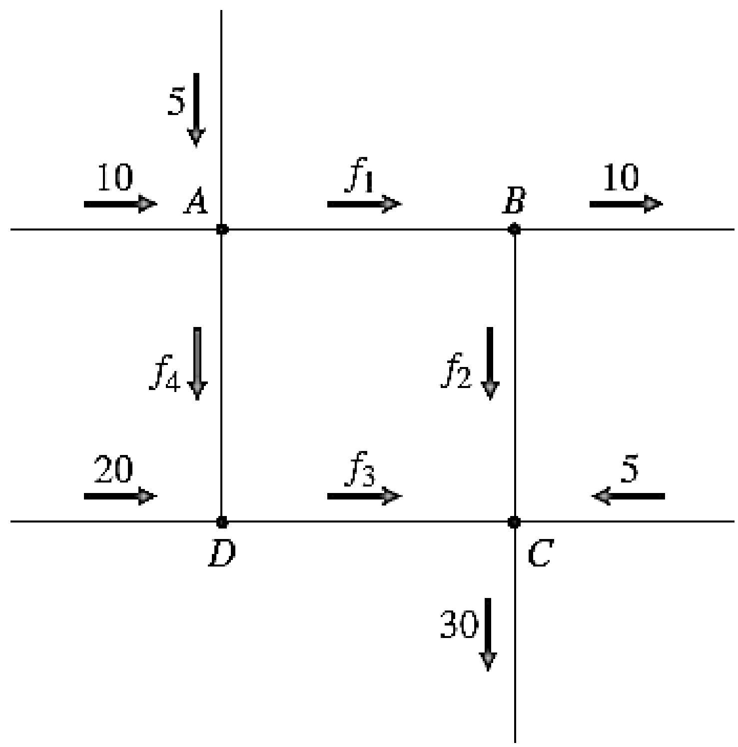
$$\begin{array}{rcrcrcr|} 2x & + & 2y & + & 4z & = & 2300 \\ x & + & 2y & & & = & 800 \\ x & + & 3y & + & z & = & 1500 \\ \hline \end{array}$$

La bióloga debe colocar 100 bacterias de cepa I y 350 de cada una de las cepas II y II en su tubo de ensayo si quiere que consuman todo el alimento.

5. **Análisis de redes**

Describa los posibles flujos a través de la red de tuberías de agua que se muestra en la siguiente figura, donde el flujo se mide en litros por minuto.

Si se controla el flujo en la rama AD de modo que sea igual a $5L/min$, determinar el valor de los otros flujos.



En cada nodo, el flujo de entrada es igual al flujo de salida.

Respuesta:

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Node } A: & 15 = f_1 + f_4 & & f_1 \qquad\qquad + f_4 = 15 \\
\text{Node } B: & f_1 = f_2 + 10 & \longrightarrow & f_1 - f_2 \qquad\qquad = 10 \\
\text{Node } C: & f_2 + f_3 + 5 = 30 & & \qquad f_2 + f_3 \qquad = 25 \\
\text{Node } D: & f_4 + 20 = f_3 & & \qquad\qquad f_3 - f_4 = 20
\end{array}
$$

Resolviendo el SEL, se obtiene que éste tiene infinitas soluciones dadas por:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 15 - t \\
f_2 &= 5 - t \\
f_3 &= 20 + t \\
f_4 &= t
\end{aligned}
$$

Si $t = 5L/min$, entonces los otros flujos son $f1 = 10$, $f2 = 0$, y $f3 = 25$.

6. Hallar y graficar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $P = (-1, 2)$, $Q = (1, 3)$ y $R = (3, -1)$.

Respuesta: Sea

$$y = ax^2 + bx + c$$

la ecuación de la parábola buscada.

Reemplazando los puntos anteriores en esta ecuación se obtiene el siguiente SEL:

2 = a·(-1)^2 + b·(-1) + c 3 = a·(1)^2 + b·1 + c -1 = a·(3)^2 + b·3 + c

$$\left.\begin{array}{ccccccc} a\cdot(-1)^2 & + & b\cdot(-1) & + & c & = & 2 \\ a\cdot(-1)^2 & + & b\cdot(1) & + & c & = & 3 \\ a\cdot(3)^2 & + & b\cdot(3) & + & c & = & -1 \end{array}\right|$$

Ordenando y resolviendo este SEL, se obtiene

$$a = -\frac{5}{8}; \quad b = \frac{1}{2}; \quad c = \frac{25}{8}$$

Por lo tanto, la parábola buscada tiene por ecuación:

$$y = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{25}{8}$$

y su gráfico es