

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

a) Hallar la inversa de $A - BC$

b) Resolver la ecuación matricial

$$((AX)^{-1}A^{-1})^{-1} = A(X^t C^t B^t + A)^t$$

Hint. Despejar X antes de reemplazar.

Solución:

$$a) \quad \blacksquare \quad BC = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad A - BC = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -4 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\blacksquare \quad (A - BC | I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 7 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$\text{Luego: } (A - BC)^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \begin{aligned} ((AX)^{-1}A^{-1})^{-1} &= A(X^t C^t B^t + A)^t \\ A(AX) &= A(BCX + A^t) \\ AX &= BCX + A^t \\ (A - BC)X &= A^t \\ X &= (A - BC)^{-1}A^t \end{aligned}$$

Nota: En el desarrollo precedente, hay un paso no justificado. Buscar ese paso y justificarlo adecuadamente.

Luego:

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -3 \\ 5 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -9 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

Respuesta:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & -9 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$

2. Determinar los valores de $k \in \mathbb{R}$, tal que el sistema:

$$\left| \begin{array}{rrcr} x & - & 2y & + & kz & = & 1 \\ (k-1)x & + & 2y & + & (k+3)z & = & 0 \\ -kx & + & 2ky & - & z & = & 1 \end{array} \right|$$

- a) Tenga solución única.
- b) Tenga infinitas soluciones.
- c) No tenga solución.

Solución: Previamente obtengamos:

$$\begin{aligned} \blacksquare & \left| \begin{array}{rrr} 1 & -2 & k \\ k-1 & 2 & k+3 \\ -k & 2k & -1 \end{array} \right| = -2k + k^3 \neq 0 \Leftrightarrow k = 0, \pm 1 \\ \blacksquare & \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & k & 1 \\ k-1 & 2 & k+3 & 0 \\ -k & 2k & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & k & 1 \\ 0 & 2k & -k^2 + 2k + 3 & -k + 1 \\ 0 & 0 & k^2 - 1 & k + 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Luego :

- a) $k \neq 0, 1, -1$ el sistema tiene solución única.
- b) $k = -1$ tiene infinitas soluciones.

$$\left(\begin{array}{rrr|l} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

c) $k = 0$ y $k = 1$ no tiene solución.

$$\text{Para } k = 0 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\text{Para } k = 1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

3. En una pensión de estudiantes se compran semanalmente 110 helados de distintos sabores: vainilla, chocolate y frutilla. El presupuesto destinado para esta compra es de \$54000 y el precio de cada helado es de \$400 el de vainilla, \$500 el de chocolate y \$600 el de frutilla. Conocidos los gustos de los estudiante, se sabe que entre helados de chocolate y de frutilla se han de comprar el 20 % más que de vainilla. ¿Cuántos helados de cada tipo se compran en la pensión, semanalmente?

a) Plantear las ecuaciones que modelan el problema.

b) Resolver a) utilizando:

- el Método de Gauss
- el Método de Gauss-Jordan
- la Regla de Cramer
- el método matricial (una ecuación matricial)

Solución:

a) Sean

- x = Número de helados de vainilla que se compran semanalmente.
- y = Número de helados de chocolate que se compran semanalmente.
- z = Número de helados de frutilla que se compran semanalmente.
- Compran 110 helados en total : $x + y + z = 110$
- Presupuesto total \$54000 : $400x + 500y + 6z = 54000$
- Chocolate + Frutilla = 20 % más que de Vainilla: $y + z = 1,2x$

Por lo tanto, el problema planteado viene modelado por el siguiente SEL:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & + & y & + & z & = & 110 \\ 400x & + & 500y & + & 600z & = & 54000 \\ & & y & + & z & = & 1,2x \end{array} \right|$$

Nota: Para simplificar los cálculos, se trabajará con el siguiente sistema equivalente (obtenido de dividir por 100 la segunda ecuación):

$$\begin{array}{rcccccc} x & + & y & + & z & = & 110 \\ 4x & + & 5y & + & 6z & = & 540 \\ 12x & - & 10y & - & 10z & = & 0 \end{array} \quad \Bigg|$$

b) Método de Gauss

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 4 & 5 & 6 & 540 \\ 12 & -10 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & -22 & -22 & -1320 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & 1 & 60 \end{array} \right) \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 0 & 1 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Un SEL equivalente es:

$$\begin{array}{rcccccc} x & + & y & + & z & = & 110 \\ & & y & + & 2z & = & 100 \\ & & & & z & = & 40 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 50 \\ y = 20 \\ z = 40 \end{cases}$$

Respuesta: Por lo tanto, se compran 50 helados de Vainilla, 20 de Chocolate y 40 de Frutilla.

■ Método de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 110 \\ 4 & 5 & 6 & 540 \\ 12 & -10 & -10 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 20 \\ 0 & 0 & 1 & 40 \end{array} \right)$$

Un SEL equivalente es:

$$\begin{array}{rcccccc} x & & & = & 50 \\ & y & & = & 20 \\ & & z & = & 40 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 50 \\ y = 20 \\ z = 40 \end{cases}$$

■ Regla de Cramer

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 12 & -10 & -10 \end{vmatrix} = 22$$

$$\det(A_x) = \begin{vmatrix} 110 & 1 & 1 \\ 540 & 5 & 6 \\ 0 & -10 & -10 \end{vmatrix} = 1100$$

$$\det(A_y) = \begin{vmatrix} 1 & 110 & 1 \\ 4 & 540 & 6 \\ 12 & 0 & -10 \end{vmatrix} = 440$$

$$\det(A_z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 110 \\ 4 & 5 & 540 \\ 12 & -10 & 0 \end{vmatrix} = 880$$

$$x = \frac{1100}{22} = 50, \quad y = \frac{440}{22} = 20, \quad z = \frac{880}{22} = 40$$

■ **Método matricial**

$$\text{Siendo } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 12 & -10 & -10 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 110 \\ 540 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el SEL de esta situación corresponde a la siguiente ecuación matricial:

$$A \cdot X = b$$

cuya solución sería

$$X = A^{-1} \cdot b$$

Buscando la inversa de matriz A , se obtiene:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 12 & -10 & -10 \end{pmatrix}$$

se obtiene

$$A^{-1} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 112 & -22 & -2 \\ -100 & 22 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, la solución del sistema es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{22} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 1 \\ 112 & -22 & -2 \\ -100 & 22 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 110 \\ 540 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$$