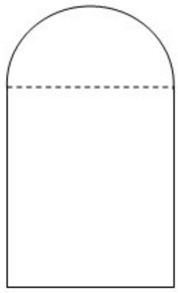
1. Introducción a los Modelos lineales y cuadráticos

1) ¿Cuánto alcohol puro debe añadir una enfermera a $20\,cm^3$ de una solución de alcohol al 60 %, si desea una solución de alcohol al 90 %?

2) Una ventana normanda (ver figura), que consiste en un rectángulo coronado con un semicírculo, tiene un perímetro total de 10 metros. Expresar su área en función de la base x del rectángulo.



Ventana Normanda

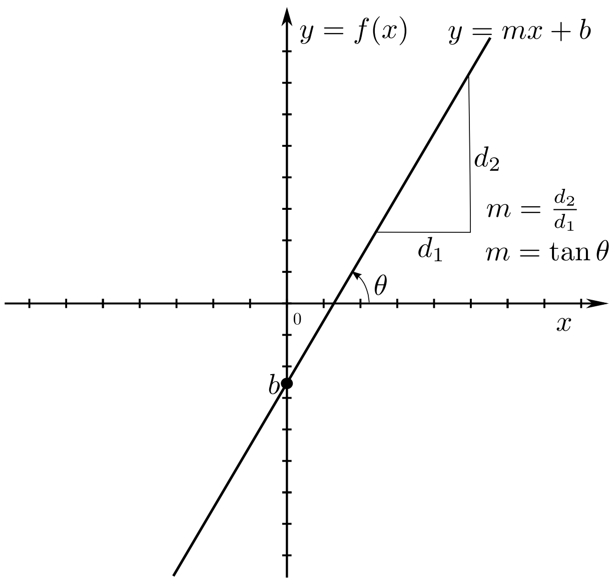
2. Funciones lineales

Una función lineal real es una expresión de la forma

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax + b,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

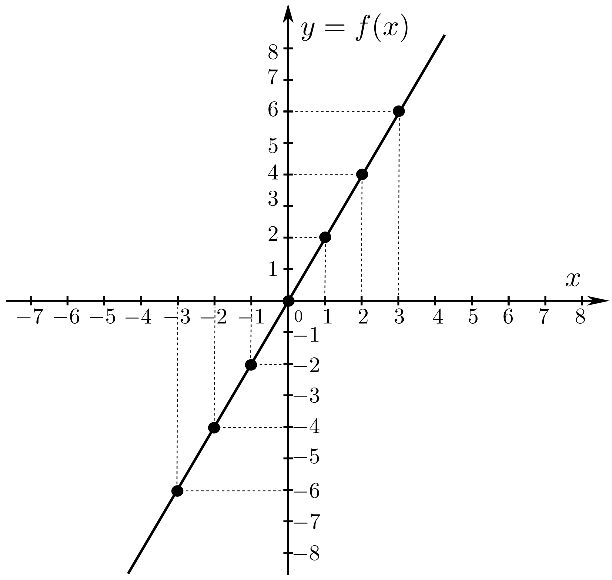
- La gráfica de f es una linea recta en el plano.
- Al número a se le llama ***pendiente***. Al variar la pendiente varia la inclinación de la recta respecto del eje horizontal x).
- Al número b se le llama ***ordenada al origen***.



Ejemplo 1. *Consideremos la función lineal*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2x.$$

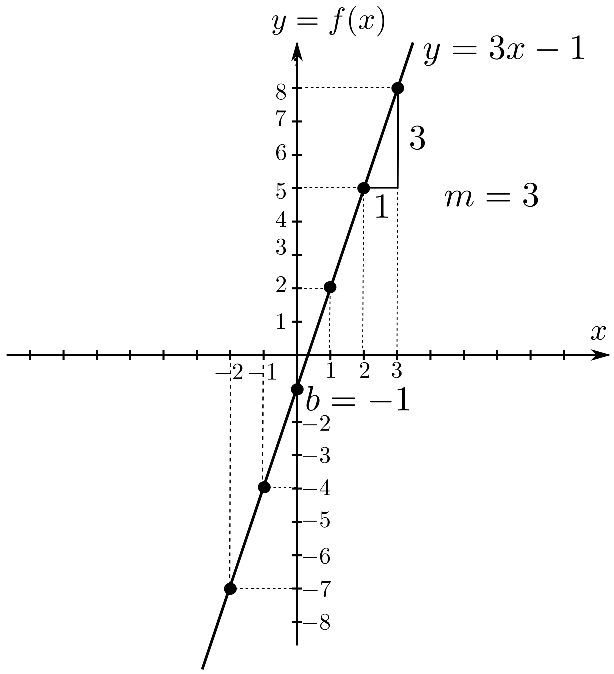
x	y=f(x)
3	6
2	4
1	2
0	0
-1	-2
-2	-4
-3	-6



Ejemplo 2. *Consideremos la función lineal*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 3x - 1.$$

x	y=f(x)
3	8
2	5
1	2
0	-1
-1	-4
-2	-7



Ejemplo 3. *Un paciente recibió inulina para medir su tasa de filtración glomerular, TFG. En el curso de la medición, la tasa de flujo urinario se modifica deliberadamente dándole a beber grandes cantidades de agua. La concentración plasmática de inulina (mg/ml), P, se mantiene constante a 1,5mg/ml mediante venoclisis. La tasa de flujo urinario $\dot{V}$ es constante a 2ml/min. Si*

$$TFG = \frac{U\dot{V}}{P}$$

varía entre 90 y 100 ml/min antes y después de ingerir agua ¿como varía la concentración de inulina, U, en la orina?

3. Funciones cuadráticas

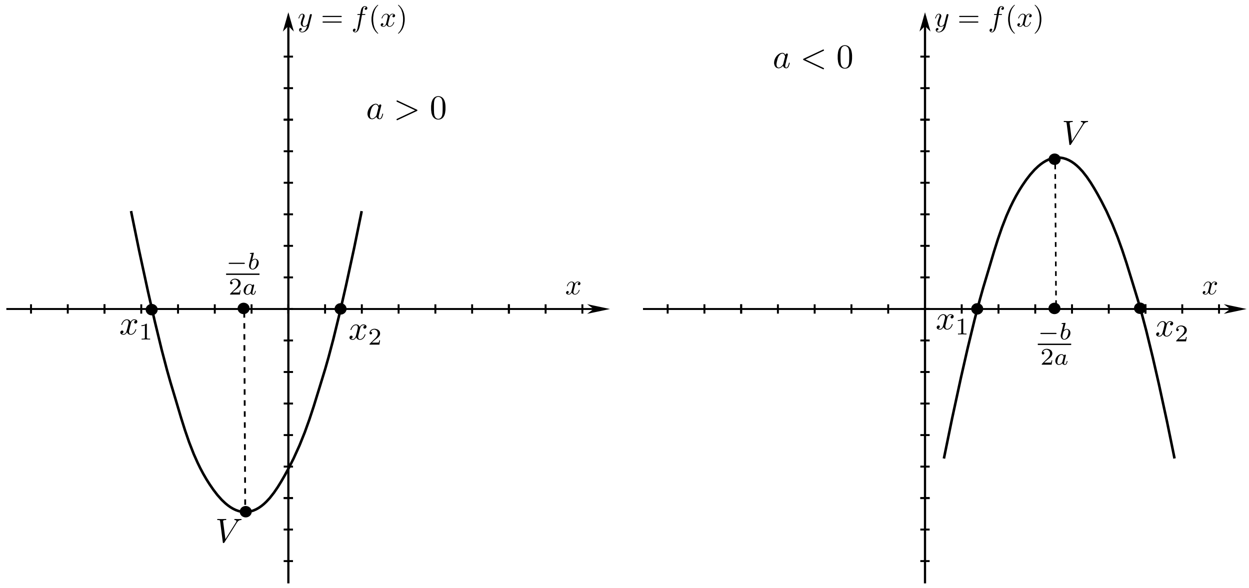
Una ***función cuadrática*** real es una expresión de la forma

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto ax^2 + bx + c,$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

- La gráfica de f es una parábola en el plano.
- Al número $\Delta = b^2 - 4ac$ se le llama ***descriminante***.
- Si $a > 0$ la parábola "abre hacia arriba".Si $a < 0$ la parábola "abre hacia abajo".
- Si $a > 0$ el punto más bajo o mínimo de la parábola se llama ***vértice***; analogamente, si $a < 0$ el vértice de la parabola es el punto más alto o máximo de la parábola. El vértice V de una parabola se encuentra sobre $-b/2a$.
- Las raices o ceros de la función f estan dados por

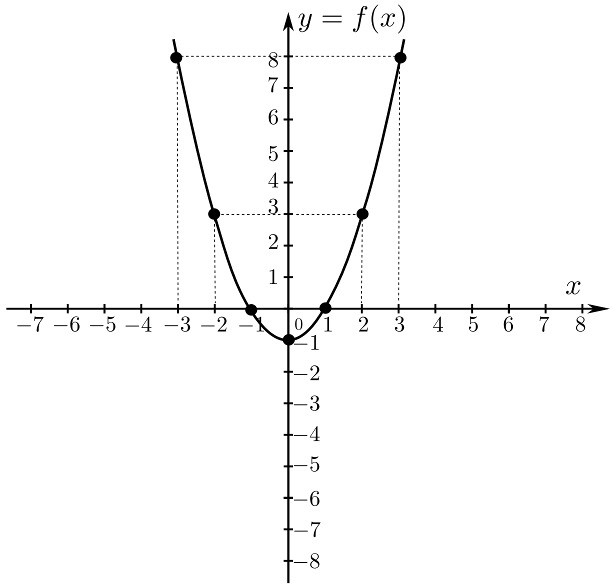
$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} & \text{si } \Delta > 0, \\ x = \frac{-b}{2a} & \text{si } \Delta = 0 \\ \text{No hay raices reales} & \text{si } \Delta < 0 \end{cases}$$



Ejemplo 4. *Consideremos la función*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 - 1.$$

x	y=$f(x)$
3	8
2	3
1	0
0	-1
-1	0
-2	3
-3	8



Ejemplo 5. *La concentración de cierto calmante suministrado mediante suero, varía en su efectividad en el tiempo según la expresión*

$$C(t) = t^2 - 2t + 5,$$

donde $C(t)$ se mide en miligramos por litro y el tiempo t en horas. Se determinó que el calmante no produce daños colaterales y es efectivo si la concentración es de por lo menos 8 miligramos por litro y a lo más 13 miligramos por litro ¿Durante cuánto tiempo es efectivo el calmante?

4. Modelos por partes

Ejemplo 6. *Un viaje subsidiado por una escuela 300 estudiantes costará a cada estudiante \$20000 si viajan no más de 200 estudiantes; sin embargo el costo a pagar por estudiante se reduciría \$100 pesos por cada uno más que se inscriba al grupo de los 200. Exprese los ingresos brutos recibidos por la escuela en función del número de inscritos a dicho viaje.*

Solución. Denotemos por n el número de estudiantes inscritos a dicho viaje, y por $f(n)$ los ingresos brutos recibidos por la escuela.

$$f(n) = \begin{cases} 20000n & \text{si } n \leq 200 \\ (40000 - 100n)n & \text{si } 200 < n \leq 300 \end{cases}$$