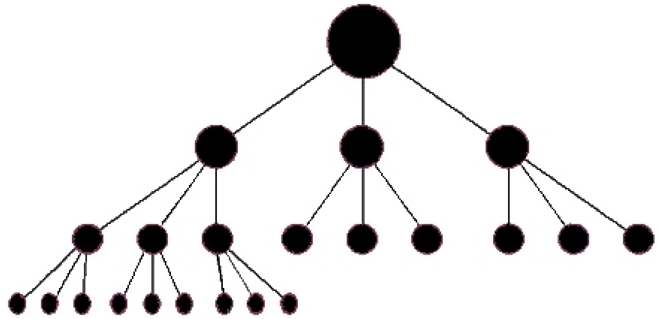


Tema: Modelos exp-log.

Capacidades:

Manejar conceptos y propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas y resolver situaciones problemáticas contextualizadas que son modeladas por estas funciones.

Temas: Función exponencial. Función logarítmica. Algunas propiedades de los logaritmos. Algunos modelos de crecimiento/decrecimiento.

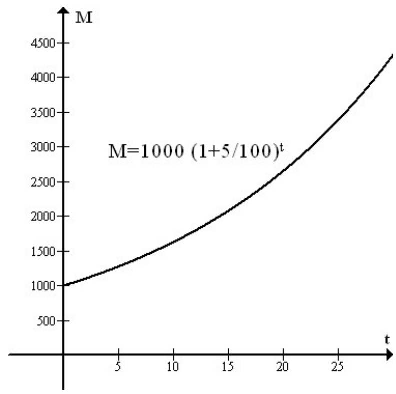
1. Introducción

Dos de la funciones más importantes que se presentan en el estudio de las aplicaciones de la matemática son la función exponencial $y = a^x$, y su inversa, la función logarítmica $y = \log_a x$.
La relevancia de estas funciones radica en el hecho que muchas y variadas situaciones de la realidad, pueden ser modeladas por ellas: *sonoridad* de un sonido, crecimiento de poblaciones, evolución de la temperatura de un cuerpo, desintegración de elementos radioactivos, magnitud de sismos, medición del aprendizaje, acumulación de intereses bancarios, etc.

2. Problema inicial: Interés compuesto

Si se hace un depósito de $\$C$ en un banco que ofrece un $i\,\%$ de interés compuesto anualmente, determinar el modelo funcional del monto acumulado, M, después de t años.

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{t}) = \mathbf{C}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{100}}\right)^{\mathbf{t}}$$

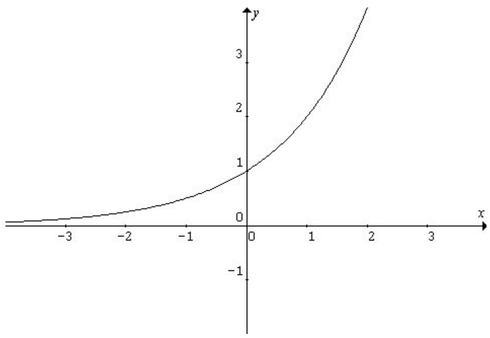


Monto acumulado a partir de $1000 con interés del 5 % compuesto anualmente

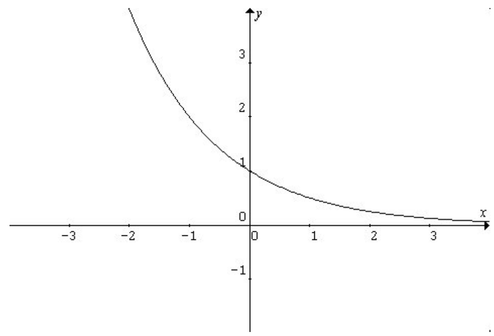
3. Función exponencial

Una *función exponencial* con *base a*, tiene la forma

$$f(x) = a^x, \text{ con } a > 0, \ a \neq 1$$



$f(x) = a^x, \ a > 1$



$f(x) = a^x, \ 0 < a < 1$

Propiedades de la función exponencial

- El dominio de una función exponencial es $\mathbb{R}$, su recorrido es $\mathbb{R}^+$.
- La función exponencial es biyectiva.
- La gráfica de toda función exponencial intersecta al eje Y en $(0, 1)$ debido a que $a^0 = 1$, para todo $a \neq 0$. Con el eje X no hay intersección.
- La función exponencial es creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $0 < a < 1$.
- Una base que se utiliza con frecuencia en las funciones exponenciales es el número irracional e, donde $e \approx 2,71828$.

4. Función logarítmica

Como se acaba de recordar, toda función exponencial

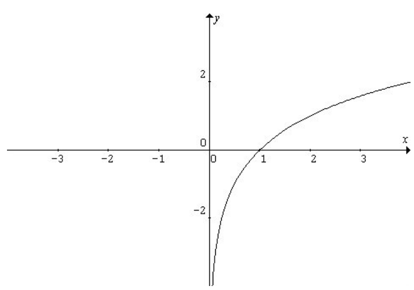
$$\begin{aligned} f \ :\ \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longmapsto y = f(x) = a^x \end{aligned}$$

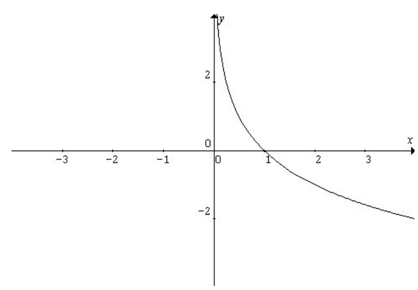
es biyectiva, y por lo tanto tiene inversa:

$$\begin{aligned} f^{-1} \ :\ \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto y = f^{-1}(x) \end{aligned}$$

esta función inversa recibe el nombre de función logarítmica, y se anota como $\log_a x$. Así entonces,

Una *función logarítmica* con *base a*, tiene la forma $f(x) = \log_a x,\ \text{con } a > 0,\ a \neq 1$





$f(x) = \log_a x,\ a > 1$ $\qquad$ $f(x) = \log_a x,\ 0 < a < 1$

Propiedades de la función logarítmica

- El dominio de la función logarítmica es $\mathbb{R}^+$, el recorrido es $\mathbb{R}$.
- La función logarítmica es biyectiva.
- La gráfica de cualquier función logarítmica intersecta al eje X en $(1,0)$ debido a que $\log_a 1 = 0$. Con el eje Y no hay intersección.
- La función logarítmica es creciente cuando $a > 1$ y decreciente cuando $0 < a < 1$.
- Como la función logarítmica es la función inversa de la exponencial, y viceversa:
$$\log_a x = b \Longleftrightarrow a^b = x$$
- A los logaritmos con base e se les llama *logaritmos naturales* y se denotan por ln, a los de base 10 se les denomina *logaritmos comunes* y se les simboliza por log. Es decir,
$$\log_e x = \ln x \qquad\qquad \log_{10} x = \log x$$
Luego,
$$\begin{array}{rcl} y = \log x & \Longleftrightarrow & x = 10^y \\ y = \ln x & \Longleftrightarrow & x = e^y \end{array}$$

4.1. Algunas propiedades de los logaritmos

Para valores apropiados, se cumple que:

1.
$$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$$

2.
$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

3.

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

4. Si

$$\log_a b = \log_a c$$

, entonces $b = c$

5. $\log_a 1 = 0$

6.

$$\log_a a^b = b$$

En particular, $\log 10^x = x$ y $\ln e^x = x$.

7.

$$a^{\log_a b} = b$$

En particular $10^{\log x} = x$ y $e^{\ln x} = x$

8. *Cambio de base*:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

5. Algunos modelos de crecimiento/decrecimiento

5.1. Modelo de crecimiento/decrecimiento exponencial (geométrico)

Principio: *Una población de tamaño P crece a una tasa que es proporcional al tamaño de dicha población.*
Luego, si $P = P(t)$ representa el número de individuos de una determinada población en el tiempo t, entonces la función que modela esta situación es:

$$P = P_0 e^{kt}$$

donde $P = P_0$ en $t = 0$.
Cuando $k > 0$, P crece y cuando $k < 0$, P decrece.

Crecimiento exponencial $(k > 0)$

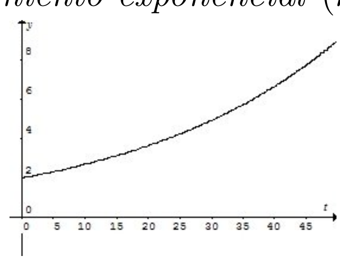


Gráfico de $y = 2e^{0,03x}$

Decrecimiento exponencial $(k < 0)$

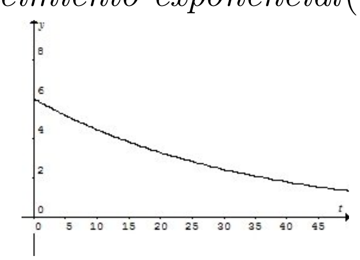


Gráfico de $y = 6e^{-0,03x}$

5.2. Modelo de crecimiento logístico

Principio: *Una población de tamaño P crece a una tasa que es proporcional al producto del tamaño de dicha población con la diferencia entre el tamaño máximo posible de la población y el tamaño de dicha población.*

Luego, si $P = P(t)$ representa el número de individuos de una determinada población en el tiempo t, entonces la función que modela esta situación es:

$$P = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

donde $P = P_0$ en $t = 0$. M representa el máximo número de individuos que la población puede alcanzar.
Es claro que la función de crecimiento también se puede escribir como:

$$P = \frac{M}{1 + Ae^{-kMt}} \qquad \text{donde} \quad A = \frac{M - P_0}{P_0}$$

Crecimiento logístico

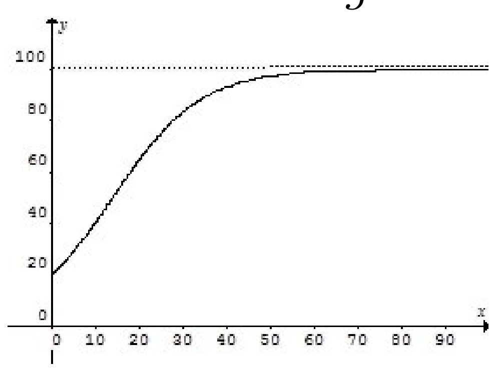


Gráfico de $y = \dfrac{20 \cdot 100}{20 + 80e^{-0{,}01 \cdot 100 \cdot t}}$

5.3. Ley de enfriamiento/calentamiento de Newton

Este modelo permite conocer como evoluciona la temperatura de un objeto.
Principio: *La razón de cambio de la temperatura* $T = T(t)$ *de un cuerpo con respecto al tiempo* t *es proporcional a la diferencia entre la temperatura* T *del cuerpo y la temperatura* t_m *del medio ambiente.*
Luego, si $T = T(t)$ representa la temperatura de un cuerpo en el instante t, entonces la función que modela esta situación es:

$$T = T(t) = t_m + (t_0 - t_m)e^{-kt}$$

donde t_0 es la temperatura inicial del cuerpo (es decir, cuando $t = 0$), t_m es la temperatura del medio ambiente y k es una constante positiva que depende de la situación en estudio.

Ley de Newton (enfriamiento)

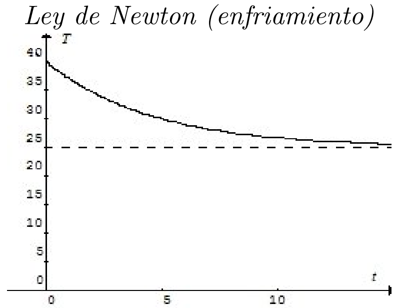
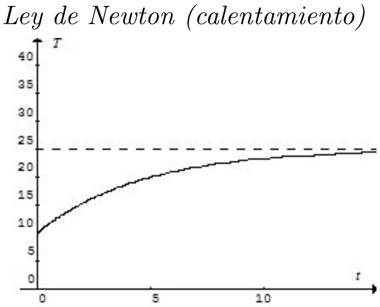


Gráfico de $y = 25 + 15e^{-0,22t}$

Ley de Newton (calentamiento)



(b)Gráfico de $y = 25 - 15e^{-0,22t}$

6. Ejemplos

1. En la relación $i = 1{,}5e^{-200t}$, se pide:
   a) Encontrar el valor de i cuando $t = -0{,}001$.
   b) Encontrar el valor de t cuando $i = 1$.

Desarrollo:

$a)$ $t = -0{,}001 \quad \Rightarrow \quad i = 1{,}5e^{(-200)\cdot(-0{,}001)} \quad \Rightarrow \quad i \approx 1{,}8$

$b)$ $i = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 1{,}5e^{-200t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 0{,}002$

2. Resolver la siguiente ecuación logarítmica

$$\log_8(x-6)+\log_8(x+6)=2$$

Desarrollo:

Como el dominio de la función logarítmica es $\mathbb{R}^+$, se tiene que las soluciones de esta ecuación, de tenerlas, deben cumplir $x - 6 > 0$ y $x + 6 > 0$, es decir, $x > 6$.

$$\begin{aligned}
\log_8 (x-6) + \log_8 (x+6) &= 2 \\
\log_8 (x-6)(x+6) &= 2 \\
\log_8 (x^2-36) &= 2 \\
x^2 - 36 &= 8^2 \\
x^2 &= 100 \\
x &= \pm 10
\end{aligned}$$

Como x debe ser mayor que 6, la única solución de la ecuación propuesta es $x = 10$.

3. Supóngase que una población experimental de moscas de la fruta aumenta de acuerdo con la ley de crecimiento exponencial. Si al inicio hay 100 moscas y 4 días después hay 600 moscas:

   a) Determinar la función que modela la situación planteada.

   b) ¿Cuántas moscas habrán en el décimo día?

   c) ¿Después de cuántos días habrán 20000 moscas?

Desarrollo:

a) La función que modela esta situación tiene la forma $P = P(t) = P_0 e^{kt}$, donde P representa el tamaño de la población de moscas y t la cantidad de días transcurridos.

Como $P(0) = 100$: $\quad 100 = P_0 e^{k\cdot 0} = P_0 \quad \Rightarrow \quad P_0 = 100$. Luego, $P = 100e^{kt}$

Como $P(4) = 600$: $\quad 600 = 100e^{k\cdot 4} \quad \Rightarrow \quad k \approx 0{,}45$

Por lo tanto, la función que modela la situación es $P = P(t) = 100e^{0{,}45t}$

b) Para el día décimo: $P = 100e^{0{,}45\cdot 10} \approx 9002$. Luego, en el día décimo hay, aproximadamente, 9002 moscas.

c) $20000 = 100e^{0{,}45t} \quad \Rightarrow \quad t \approx 12$. Luego, después de 12 días hay, aproximadamente, 20000 moscas.

4. El número de bacterias, y, en un cultivo en un tiempo t (en días) está dado por la función $y = 50\mathrm{e}^{2t}$

   a) ¿Cuál es el número de bacterias en el instante inicial ($t = 0$)?

   b) ¿En qué momento el número de bacterias será el doble del inicial?

Solución:

a) Cuando $t = 0$, se tiene $y = 50\mathrm{e}^{(2)(0)} = 50\mathrm{e}^0 = 50$. Luego, en $t = 0$ hay 50 bacterias.

b) La colonia tendrá 100 (que corresponde al doble del original) bacterias cuando t satisfaga la relación: $100 = 50\mathrm{e}^{2t}$.

De donde, $\mathrm{e}^{2t} = 2$, aplicando logaritmo natural se tiene: $2t = \ln 2$, luego $t \approx 0,346$

Por lo tanto, en aproximadamente $0,346$ días $= 8,32$ horas la colonia se duplica.

5. Suponer que una habitación se mantiene a una temperatura constante de 70° y que un objeto se enfría de 350° a 150° en 45 minutos. ¿Qué tiempo se necesitará para enfriar dicho objeto hasta una temperatura de 80°?

Solución:

Sean t la variable que representa el tiempo (medido en minutos) y T la variable que representa la temperatura (en °C) del objeto en el instante t.

Luego, de la Ley de enfriamiento de Newton y como la temperatura del medio ambiente es de 70° y la temperatura inicial del objeto es de 350°:

$T = 70 + (350 - 70)e^{-kt}$, es decir $T = 70 + 280e^{-kt}$

Como en $t = 45$, $T = 150°$, se tiene que : $150 = 70 + 280e^{-k\cdot 45}$.

De donde $k = \dfrac{\ln(2/7)}{45} \approx 0{,}028$. Por lo tanto: $T = 70 + 280e^{-0{,}028t}$

Ahora bien, para encontrar el tiempo t en el cual el cuerpo llega a la temperatura de 80°, reemplazamos T por 80 en la relación precedente y despejamos t. Al hacerlo, se obtiene que $t \approx 119$ minutos.

Por lo tanto, aproximadamente después de 119 minutos, la temperatura del cuerpo es de 80°.

7. Desafío

Calcular el valor de cada una de las siguientes expresiones:

1.
$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2015}\right)$$

2.
$$\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\ldots\cdot\log_{2016} 2015$$