7.1 Introducción a los Modelos exponenciales y logarítmicos

7.1.1 Exponenciales

1) Si una población de bacterias comenzo con 100 y se duplica cada día. ¿Qué cantidad de bacterias hay despues de n dias?

   Solución.

   a) Denotemos por $N(n)$ el número de bacterias que hay despues de n dias.
   b) Para determinar la expresión general de $N(n)$, analizaremos los casos $n = 1, 2, 3, 4$.
   c) Despues de 1 día hay $200 = 100(2)$. Despues de 2 dias hay
   $$400 = 200(2) = 100(4) = 100(2)^2$$
   d) Despues de 3 dias hay
   $$800 = 400(2) = 100(8) = 100(2)^3$$
   e) De lo anterior podemos deducir que después de n dias hay
   $$N(n) = 100(2)^n.$$
   f) Se dice que $N(n)$ tiene un crecimiento exponencial.

2) Las funciones exponenciales se utilizan para modelar:

   a) La desintegración de sustancias radioactivas.
   b) La propagación de enfermedades.
   c) El crecimiento de poblaciones.

7.1.2 Logaritmos

1) Una persona invertirá 1.000.000 de pesos en una cuenta del banco que ofrece 8.5% de interés compuesto anualmente. ¿Cuánto tiempo debe esperar para obtener el doble de lo que depositará?

   Solución.

   a) Sabemos que depositará 1.000.000 de pesos como monto inicial.
   b) El monto de la cuenta después de n años, $M(n)$ es
   $$M(n) = 1.000.000(1.085)^n$$
   c) Desea esperar hasta que el monto sea de 2.000.000 de pesos. Entonces,
   $$2.000.000 = 1.000.000(1.085)^n$$
   donde n es el número de años que debe mantener su dinero sin retiros.

d) Para calcular el valor de n debemos despejar n de la ecuación:

$$(1.085)^n = 2.$$

e) Para poder realizar esto necesitamos conocer/aplicar la función logaritmo.

2) El pH es una medida de acidez o alcalinidad de una disolución acuosa. El pH indica la concentración efectiva, a_{H^+}, de iones de hidrogeno H^+ (o de iones hidronio H_3O^+) presentes en la disolución.

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}(\mathrm{a}_{H^+}).$$

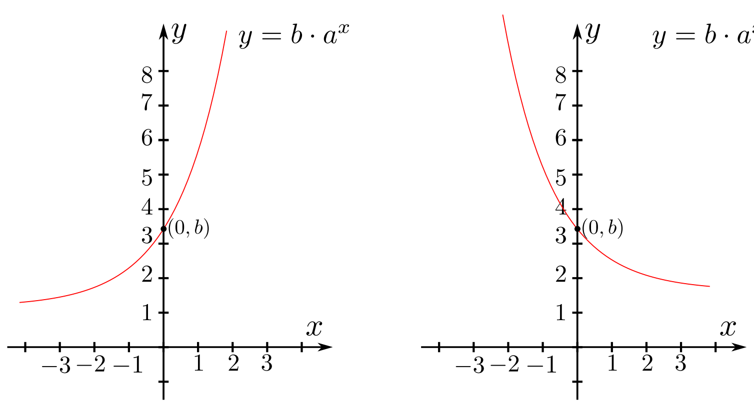
7.2 Funciones exponenciales

Una función exponencial real es una expresión de la forma

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto b \cdot a^x,$$

donde $a \in R^+ = (0, \infty)$ y $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$.

- $f(x)$ es una función exponencial de base a.
- Al número a se le llama ***base***.
- Si $a > 1$ la función es creciente: si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.
- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente: si $x, y \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$.
- El número b es la ***ordenada al origen***.

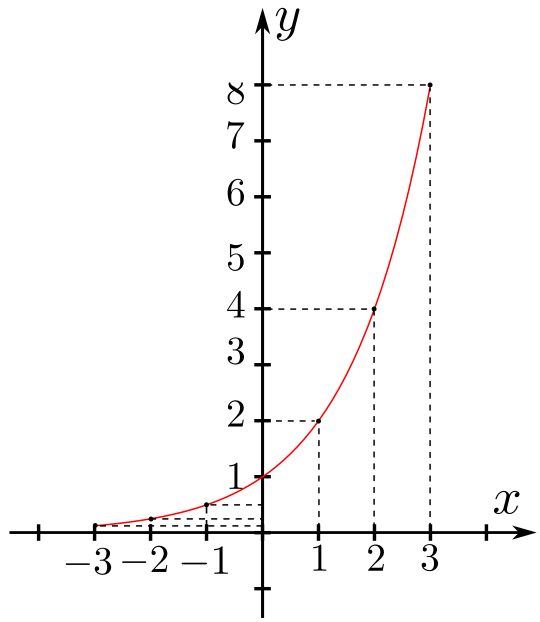


$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

Ejemplo 7.1 *Consideremos la función exponencial de base* 2

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2^x.$$

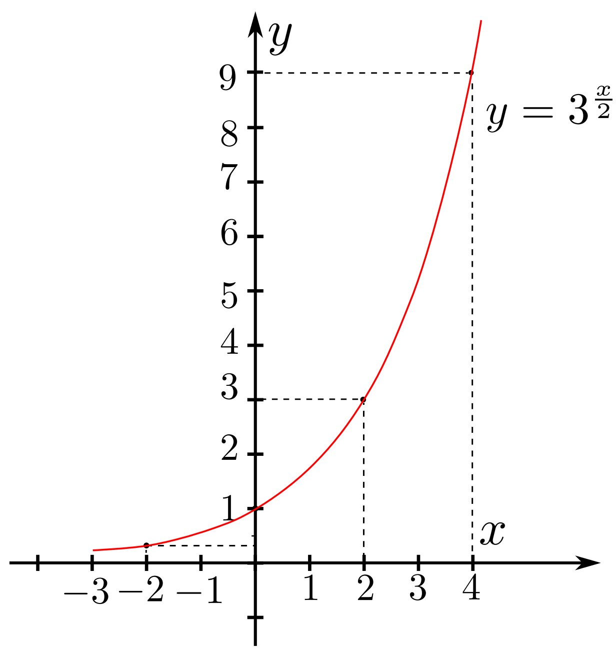
x	$y = f(x)$
3	8
2	4
1	2
0	1
-1	$1/2$
-2	$1/4$
-3	$1/8$



Ejemplo 7.2 *Consideremos la función exponencial*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 3^{\frac{x}{2}}.$$

x	$y = f(x)$
4	9
2	3
0	$\sqrt{3}$
0	1
-2	$1/3$
-4	$1/9$



7.2.1 Propiedades de las funciones exponenciales

- El dominio de la función es $\mathbb{R}$ y su codominio natural es $\mathbb{R}$.

- La imagen (recorrido) de la función es $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.
- Es inyectiva.
- Considerando el codominio como $\mathbb{R}$ la función no es sobreyectiva.
- Considerando el codominio como $\mathbb{R}^+$ la función es sobreyectiva y biyectiva.

De la definición, obtenemos las siguientes propiedades

1) $f(0) = b$.
2) Si $b = 1$, entonces $f(x + y) = f(x)f(y)$ y $f(x - y) = f(x)/f(y)$, esto es,
$$a^{x+y} = a^x a^y$$
y
$$a^{x-y} = a^x a^{-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

7.2.2 Modelo de Malthus

Uno de los números más importantes para base de una función exponencial, es el número irracional $e \approx 2.71828$. La función exponencial de esta base aparece de forma natural en el estudio de crecimiento (y decrecimiento) de poblaciones. Supongamos que N_0 es el número de individuos presentes en una población en un tiempo $t = 0$ y λ es un número real fijo. El modelo exponencial o ***modelo de Malthus***
$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$
nos indica el número de individuos que tiene la población en un tiempo t.

- Si $\lambda > 0$ la función $N(t)$ es creciente: un modelo de crecimiento poblacional.
- Si $\lambda > 0$ la función $N(t)$ es decreciente: un modelo de decrecimiento poblacional.
- λ es la tasa o razón de crecimiento poblacional.

Ejemplo 7.3 *Una bacteria en el oído medio se incrementa a razón del 2% cada hora. Suponga que al inicio de una infección bacteriana estaban presentes 120 bacterias.*

1) *Determine el número de bacterias $N(t)$ presentes después de t horas.*
2) *¿Cuántas bacterias están presentes en el oído después de 2 horas?*

Solución.

- *Del planteamiento del problema, la función exponencial resultante debe ser creciente.*
- *Utilizando el modelo $N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ y los datos del problema obtenemos que*
$$N(t) = 120e^{0.02t}.$$
- *Pasadas 2 horas el número de bacterias será de $N(2) = 125$.*

7.2.3 Modelo logístico

El modelo logístico esta dado por la expresión

$$P(t) = a, \frac{1 + me^{rt}}{1 + ne^{rt}},$$

donde a, m, n y r son parámetros.
El modelo logístico aparece en diversos modelos de crecimiento de poblaciones, propagación de enfermedades epidémicas y difusión en redes sociales.

Ejemplo 7.4 *El desarrollo de cierta epidemia se caracteriza por tener un comportamiento dado por la función*

$$f(t) = \frac{250}{1 + e^{-2t}},$$

que representa la cantidad de personas que la adquieren en un determinado tiempo t medido en semanas. ¿Cuántas personas habrán sido contagiadas en tres semanas?

7.3 Funciones logarítmicas

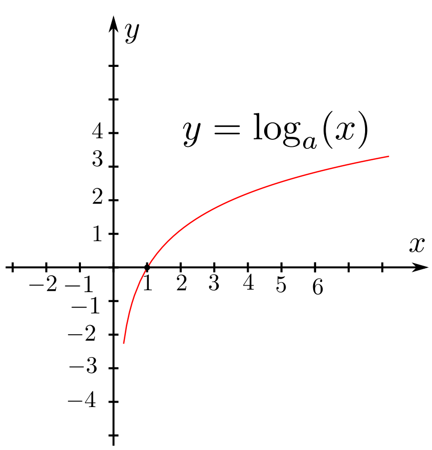
Una ***función logarítmica*** real es una expresión de la forma

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto log_a(x),$$

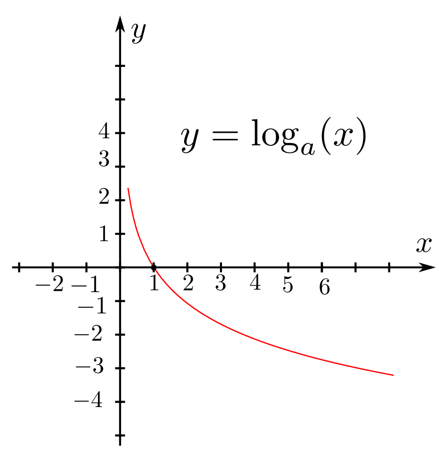
donde $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, y

$$log_a(x) = y \quad \text{si y sólo si} \quad a^y = x.$$

- Al número a se le llama ***base*** del logaritmo.
- Si $a > 1$, entonces la función es creciente.
- Si $0 < a < 1$ la función es decreciente.



$a > 1$

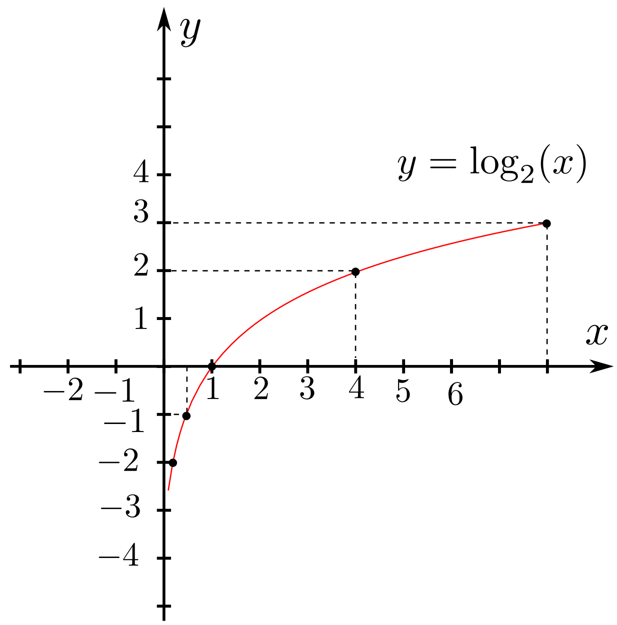


$0 < a < 1$

Ejemplo 7.5 *Consideremos la función*

$$\log_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto log_2(x).$$

x	$y = f(x)$
3	8
2	3
1	0
0	-1
1/2	0
1/4	3
1/8	8



7.3.1 Propiedades de las funciones logarítmicas.

- El dominio de la función es $\mathbb{R}^+$ y su codominio natural es $\mathbb{R}$.
- La imagen (recorrido) de la función es $\mathbb{R}$
- Es inyectiva.
- Es sobreyectiva.
- Es biyectiva.

De la definición, obtenemos las siguientes propiedades

1) $\log_a(1) = 0$.
2) $\log_a(a^x) = x$.
3) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
4) $\log_a(x/y) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
5) $\log_a(x^y) = y \log_a(x)$.

Si $a = e$ ($e \approx 2.7182$), entonces la función se llama ***logaritmo natural*** y se denota por $\ln(x)$.
Si $a = 10$, entonces escribimos $\log(x)$ ($\log(x) := \log_{10}(x)$).

Ahora vamos a mostrar la relación entre $\log_a(x)$ y $\ln(x)$.

Tenemos la relación

$$\log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x.$$

Aplicando la propiedad 5) de logaritmos y usando el logaritmo natural obtenemos

$$y\ln(a) = \ln(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Por lo tanto la función logaritmo de base a se puede expresar como:

$$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

7.3.2 Relación entre e^x y $\ln(x)$

Las funciones exponencial de base e y el logaritmo natural son ***inversas*** una de la otra:

$$e^{\ln(x)} = x \quad \text{y} \quad \ln(e^x) = x.$$