Índice general

1. Vectores en el plano **2**

1.1. Introducción . . . 2

1.2. ¿Qué es un vector? . . . 3

1.2.1. Dirección y sentido . . . 3

1.2.2. Vectores . . . 3

1.2.3. Módulo de un vector . . . 4

1.3. Representación geométrica de vectores en el plano . . . 4

1.3.1. Vectores iguales (o equivalentes) . . . 5

1.3.2. Vectores opuestos . . . 6

1.3.3. Operaciones con vectores . . . 6

1.4. Representación analítica de vectores del plano . . . 9

1.4.1. Componentes de un vector . . . 9

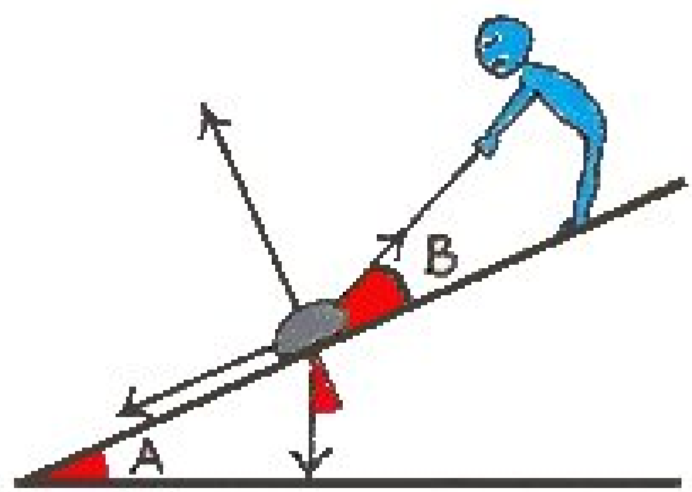
1.4.2. Módulo de un vector . . . 10

1.4.3. Operaciones con vectores del plano . . . 13

1.4.4. Producto punto y Ángulo entre dos vectores . . . 14

Capítulo 1

Vectores en el plano



1.1. Introducción

Cuando nos referimos al tiempo que demanda un suceso determinado, basta *un número con una unidad de medida*. Por ejemplo, se demoró 4 segundos, corrió durante 2 minutos, nos encontraremos en una semana, etc. Las magnitudes que pueden describirse de esta manera reciben el nombre de *escalares*, como por ejemplo el tiempo, la masa, la densidad, el volumen, la temperatura.
Otras magnitudes como el desplazamiento, la fuerza, la aceleración, no pueden ser descritas sólo por un número. Por ejemplo, ¡camine 5 metros!, es una solicitud muy ambigua que puede conducir a una posición final distinta para cada persona que la reciba; en cambio, ¡camine 5 metros por la Alameda hacia el poniente! producirá el efecto solicitado. Estas magnitudes para las cuales hay que especificar, además de un valor numérico, la dirección y sentido en el que actúan, se denominan *vectoriales*. Los vectores dan origen a las magnitudes vectoriales

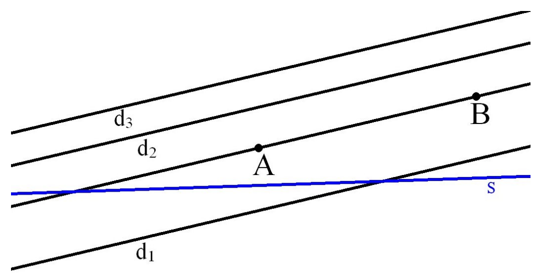
los que operan según las leyes del Álgebra Vectorial.

El concepto de vector se remonta a tiempos muy antiguos. Se cree que Arquímedes lo utilizó implícitamente. El término vector se debe a Hamilton, matemático y astrónomo irlandés (1805 - 1865) que lo introdujo para designar un segmento de recta orientado.

1.2. ¿Qué es un vector?

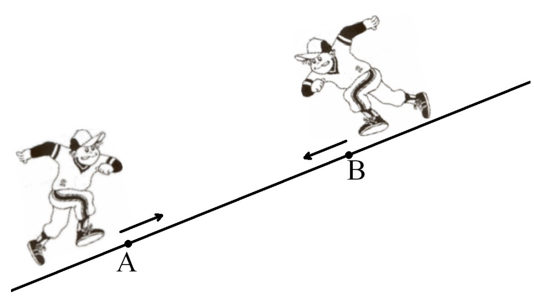
1.2.1. Dirección y sentido

a) **Dirección**. Cuando dos rectas son paralelas se dice que ellas tienen la misma *dirección*.



Las rectas d_1, d_2 y d_3 tienen la misma dirección que la recta AB.
La recta s tiene una dirección distinta.

b) **Sentido**. Si se dirige u orienta una recta, se determina un **sentido** sobre la dirección de dicha recta. En la dirección de una recta AB hay dos sentidos: un sentido es de A hacia B, y el otro es de B hacia A. Ambos sentidos son diferentes.

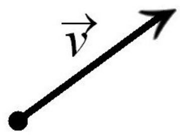


Los dos sentidos posibles en la dirección de la recta AB

1.2.2. Vectores

Definición. Un *vector* del plano (o del espacio) es un segmento de recta dirigido (u orientado).

Notación y representación. Es usual denotar un vector por una letra minúscula con una flecha encima, y representarlo geométricamente por una flecha. Por ejemplo, la siguiente figura muestra un vector $\overrightarrow{v}$:



Representación geométrica de un vector v

1.2.3. Módulo de un vector

La longitud de un vector $\overrightarrow{v}$ recibe el nombre de *módulo* de $\overrightarrow{v}$ y se denota por $||\overrightarrow{v}||$.

Nota. En aplicaciones en Física, el módulo de una fuerza es llamada **intensidad** de la fuerza.

1.3. Representación geométrica de vectores en el plano

Un *vector* está definido por tres elementos:

- Una *dirección*, dada por la recta que contiene al segmento.
- Un *sentido*, señalado por la flecha (es uno de los dos sentidos posibles en la dirección de la recta que lo contiene).
- Una *longitud*, llamada **módulo** del vector, que corresponde a la longitud del segmento.

Un vector del plano se puede definir también como asociado a dos puntos del plano.

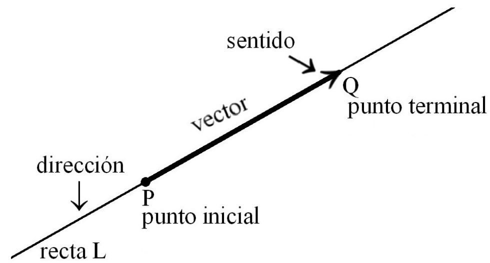
Definición. Sean P y Q dos puntos distintos del plano. El segmento dirigido de P a Q es un *vector* del plano, que se denota por $\overrightarrow{PQ}$.

Observaciones.

a) El vector $\overrightarrow{PQ}$ tiene por *dirección*, la dirección de la recta PQ; tiene por *sentido*, el sentido de P hacia Q; y su módulo es la longitud del segmento PQ.

b) P es el *punto inicial* del vector $\overrightarrow{PQ}$.

   Q es su *punto terminal* o extremo del vector $\overrightarrow{PQ}$.



Nota. En mecánica, el *punto inicial* de un vector es el punto de aplicación de la fuerza.

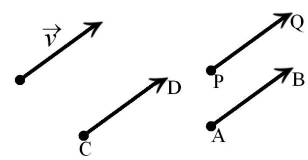
c) El módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ se denota $||\overrightarrow{PQ}||$.

d) **Vector nulo**. Cuando el punto inicial P y el punto terminal Q coinciden, el vector $\overrightarrow{PP}$ recibe el nombre de *vector nulo*, y se denota por $\overrightarrow{0}$.

El *vector nulo* no tiene dirección ni sentido, y su módulo es 0.

1.3.1. Vectores iguales (o equivalentes)

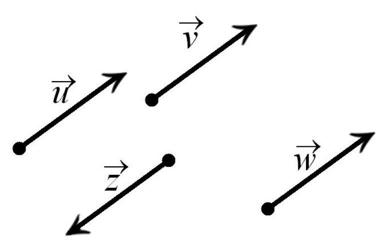
Una dirección, un sentido y una longitud definen un vector $\overrightarrow{v}$, existiendo *muchos* segmentos dirigidos que lo representan, como se muestra en la figura:



Representaciones geométricas del vector $\overrightarrow{v}$

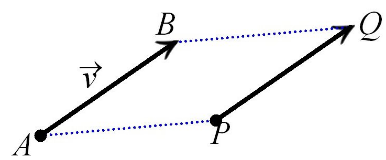
Luego, el vector $\overrightarrow{v}$ puede denotarse también como $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ o $\overrightarrow{PQ}$.

Definición. Dos vectores no nulos $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ son *iguales* (o equivalentes), cuando ellos tienen la misma dirección, el mismo sentido y el mismo módulo. Se denota $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.



$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w} \qquad \overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{z}$

Observación.
Dado un vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ y sea P un punto cualquiera del plano. Existe un único punto Q del plano tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{v}$.



El punto Q es tal que $APQB$ es un paralelogramo.

Luego, para representar un vector $\overrightarrow{AB}$ se puede elegir un punto a nuestro gusto para que sea punto inicial del vector.

1.3.2. Vectores opuestos

Sea $\overrightarrow{v}$ un vector. El vector que tiene la misma dirección, el mismo módulo y sentido contrario de $\overrightarrow{v}$ es llamado *vector opuesto* de $\overrightarrow{v}$ y se denota $-\overrightarrow{v}$.

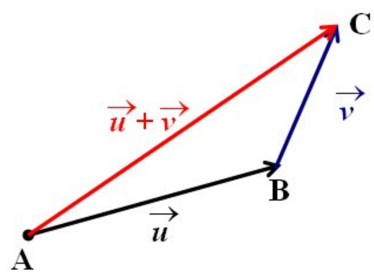
Nota. El *vector opuesto* del vector $\overrightarrow{PQ}$ es el vector $\overrightarrow{QP}$. Luego:

$$\overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{PQ}$$

1.3.3. Operaciones con vectores

Adición de vectores

Cualquiera sean los puntos A, B y C, la *suma* de los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ es el vector $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$. El vector suma se llama *resultante*.



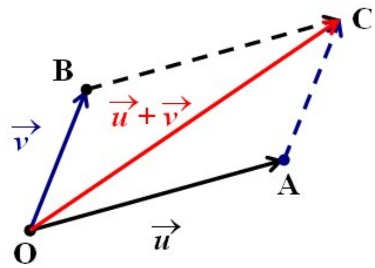
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Observaciones.

a) **Suma de vectores con el mismo punto inicial**: se aplica *regla del paralelogramo*, ilustrada en el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Para obtener geométricamente el *vector suma* de los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$, se traza el vector $\overrightarrow{AC}$ tal que $\overrightarrow{AC} \parallel \overrightarrow{v}$.

Como $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}$. Luego, la suma de los dos vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ es el vector $\overrightarrow{OC}$ definido por la diagonal del paralelogramo $OACB$.



$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$$

b) **Suma de dos vectores cualquiera**.

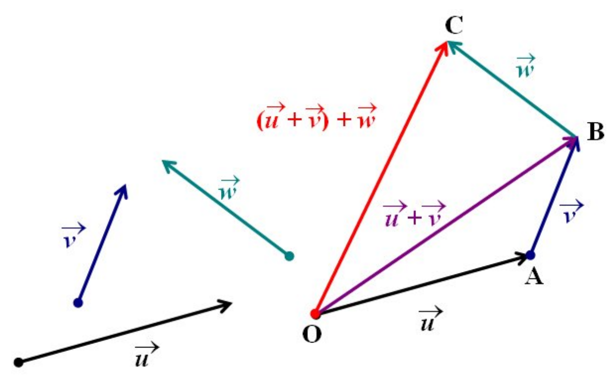
Para sumar dos vectores cualquiera $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{w}$, se traza un vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$, siendo A un punto cualquiera, y luego se traza el vector $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{w}$ tal que punto inicial de $\overrightarrow{w}$ sea el punto terminal de $\overrightarrow{v}$. Luego $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{AC}$.

c) $||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leqslant ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}||$, relación llamada *desigualdad triangular*.

d) Propiedades de la adición de vectores:

- Es conmutativa: $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$
- Es asociativa: $\overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{z}) = (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{z}$
- $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$; $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

e) Para sumar más de dos vectores, generalmente se usa el llamado *polígono de fuerzas*, el cual se obtiene uniendo el punto terminal de un vector con el punto inicial del siguiente. El *vector resultante* tiene su punto inicial en el inicial del primero, y su punto final es el extremo del último. Por ejemplo, la figura presenta la representación gráfica de la suma de tres vectores $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$:

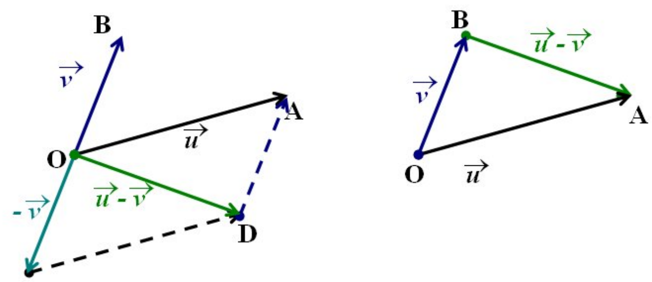


$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}, \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}: \qquad \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{OC}$$

f) **Diferencia entre vectores**

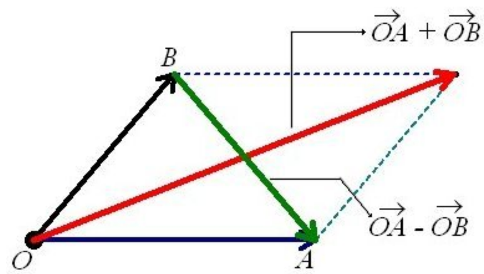
La diferencia entre los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ es el vector denotado por $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, que se obtiene de sumar los vectores $\overrightarrow{u}$ y $-\overrightarrow{v}$. Es decir:

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$$



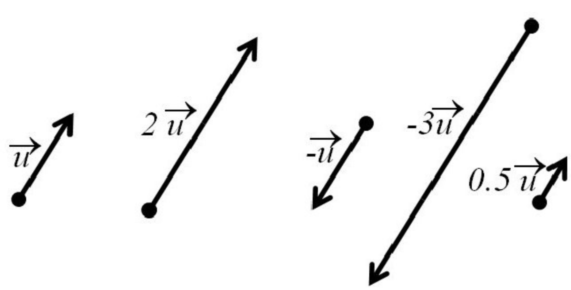
$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OD} \text{ que es igual al vector } \overrightarrow{BA}$$

g) La siguiente figura muestra la representación gráfica de la suma y la diferencia de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$:



Multiplicación de un vector por un escalar

El producto de un número real c por un vector $\overrightarrow{v}$ es el vector denotado por $c\overrightarrow{v}$. El vector $c\overrightarrow{v}$ tiene la misma dirección que $\overrightarrow{v}$, tiene el mismo sentido que $\overrightarrow{v}$ si $c > 0$ y sentido contrario de $\overrightarrow{v}$ si $c < 0$, y su módulo es $|c|\,||\overrightarrow{v}||$.



Observaciones

a) Algunas propiedades de esta operación son:

- $-v = (-1)v$
- $(c+d)\overrightarrow{v} = c\,\overrightarrow{v} + d\,\overrightarrow{v}$
- $c(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}) = c\,\overrightarrow{v} + c\,\overrightarrow{u}$

b) Si $\overrightarrow{u} = c\,\overrightarrow{v}$, con $c \neq 0$, entonces $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ tienen la misma dirección.

1.4. Representación analítica de vectores del plano

Los vectores pueden representarse *gráficamente* o geométricamente por una *flecha*, quedando claramente establecido su punto inicial y su punto terminal, y también pueden representarse o expresarse analíticamente, con respecto a un sistema de coordenadas rectangulares.

Consideremos el plano provisto de un sistema de coordenadas rectangulares $(O; X, Y)$, donde O es el *origen* del sistema, la recta horizontal OX es el eje de las abscisas (eje X), la recta vertical OY es eje de las ordenadas (eje Y) y la unidad en cada eje.
Los vectores del plano pueden expresarse analíticamente, mediante su descomposición en *componentes* con respecto al sistema de coordenadas rectangulares.

1.4.1. Componentes de un vector

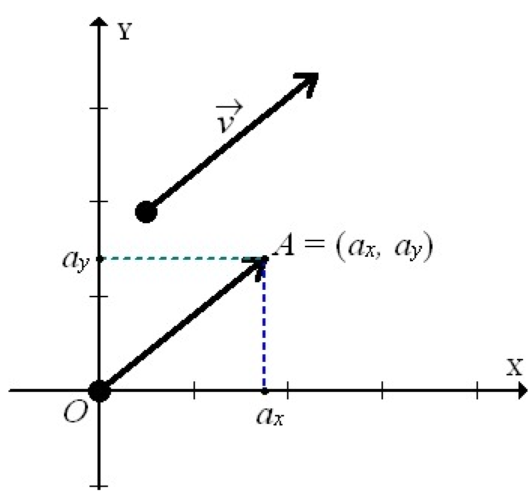
Observación. De acuerdo lo tratado anteriormente:

a) Un vector es definido por un punto inicial y un punto terminal, y se representa geométricamente por una flecha o segmento dirigido.

b) Todas las flechas o segmentos dirigidos del plano que tienen la misma longitud, la misma dirección y el mismo sentido, representan a un mismo vector, es decir, son vectores iguales.

c) Sea $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$ un vector con punto inicial en P y punto terminal en Q. Se tiene que, existe un único vector $\overrightarrow{OA}$ con punto inicial en el origen O del sistema de coordenadas, tal que $\overrightarrow{OA}$ es igual al vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PQ}$.

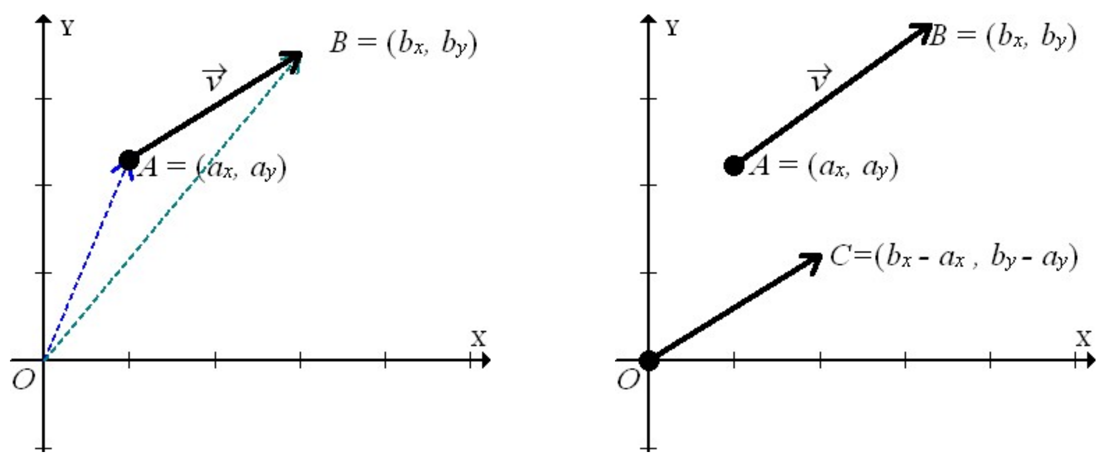
Definición. Sea $\overrightarrow{v}$ un vector del plano, y sea $\overrightarrow{OA}$ el vector que representa a $\overrightarrow{v}$, tal que su punto inicial es O el origen del sistema de coordenadas y su punto terminal es el punto $A = (a_x, a_y)$.



- El vector $\overrightarrow{OA}$ se denomina *vector posición* de $\overrightarrow{v}$.
- Los números a_x y a_y se denominan las *componentes* del vector $\overrightarrow{v}$. Es decir, las **componentes** del vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}$ corresponden a las coordenadas del punto A.

Definición. El vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}$ se identifica con el punto A y se acostumbra denotarlo como $\overrightarrow{v} = (a_x, a_y)$. Esta forma de denotar al vector $\overrightarrow{v}$ se denomina *representación analítica* de $\overrightarrow{v}$.

Observación. Sea $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$, siendo A su punto inicial y B su punto terminal, y sea $\overrightarrow{OC}$ el vector posición de $\overrightarrow{AB}$.



Notar que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$. Luego, si $A = (a_x,\ a_y)$ y $B = (b_x,\ b_y)$ entonces las *componentes* del vector $\overrightarrow{AB}$ son las coordenadas del punto C:

$$c_x = b_x - a_x \qquad\qquad c_y = b_y - a_y$$

Si el vector posición de $\overrightarrow{AB}$ es el vector $\overrightarrow{OC}$, donde $C = (c_x, c_y)$, entonces la *representación analítica* de $\overrightarrow{AB}$ es (c_x, c_y).

Nota. La expresión "$\overrightarrow{v} = (a, b)$" se entiende que es un vector cuyo punto inicial es el origen O del sistema y su punto terminal es el punto $A = (a, b)$.

1.4.2. Módulo de un vector

El módulo del vector $\overrightarrow{v} = (a_x, a_y)$, denotado por $||\overrightarrow{v}||$ es:

$$||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Observación. Un vector $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA}$ con punto inicial en el origen del sistema, queda definido en los siguientes casos:

a) Cuando se conocen las componentes del vector.

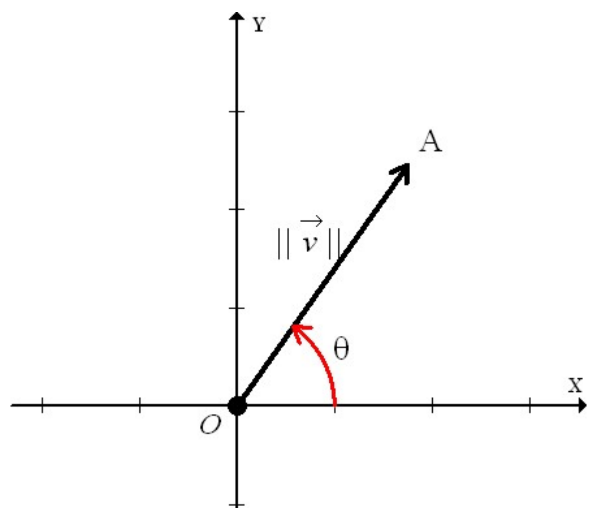
Sea $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OA} = (a_x, a_y)$.

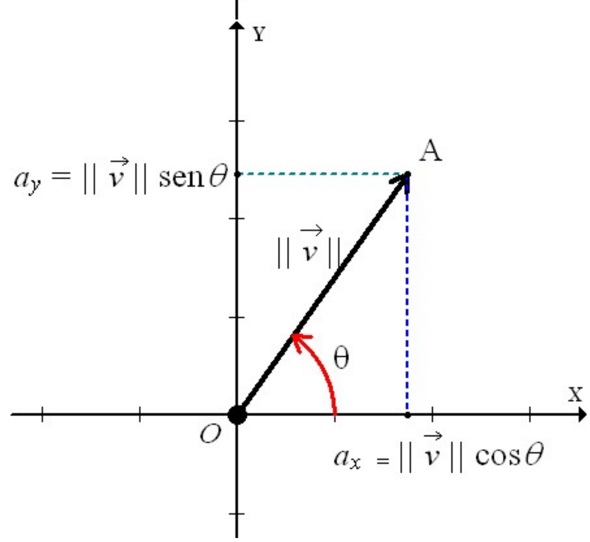
- El módulo de $\overrightarrow{v}$ es: $||\overrightarrow{v}|| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$.
- La dirección y el sentido se puede obtener determinando el ángulo θ que forma el vector $\overrightarrow{OA}$ con el semieje positivo de las abscisas:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

donde el sentido es de O hacia A.

b) Cuando se conoce el módulo del vector $\overrightarrow{OA}$ y el ángulo θ que forma el vector $\overrightarrow{OA}$ con el semieje positivo de las abscisas, medido en sentido contrario a las agujas del reloj.





Las componentes de $\overrightarrow{v}$ se pueden determinar mediante las expresiones:

$$a_x = ||\overrightarrow{v}|| \cos\theta \qquad\qquad a_y = ||\overrightarrow{v}|| \operatorname{sen}\theta$$

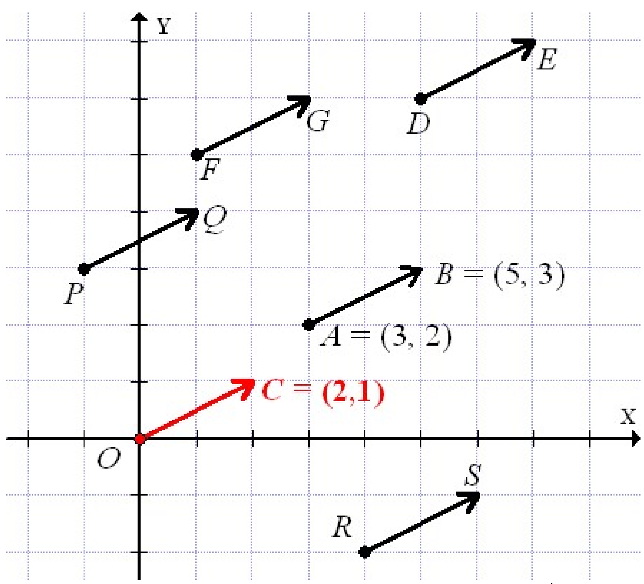
Luego $\overrightarrow{OA} = ||\overrightarrow{v}|| (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$.

Observaciones.

a) El **vector nulo** del plano, se representa analíticamente $\overrightarrow{O} = (0, 0)$.

b) El **vector opuesto** del vector $\overrightarrow{v} = (a_x, a_y)$ es el vector $-\overrightarrow{v} = (-a_x, -a_y)$.

c) Dos vectores son iguales cuando se representan por el mismo vector posición. Por ejemplo,



Ejemplos de vectores iguales a $\overrightarrow{OC}$

Nota. En los sistemas de coordenadas rectangulares del plano, se acostumbra utilizar los símbolos $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ para definir los vectores de módulo 1:

$$\overrightarrow{i} = (1, 0) \qquad \text{y} \qquad \overrightarrow{j} = (0, 1)$$

que representan las unidades de cada eje. El vector $\overrightarrow{v} = (a_x, a_y)$ de la figura se puede expresar también como:

$$\overrightarrow{v} = a_x \overrightarrow{i} + a_y \overrightarrow{j}$$

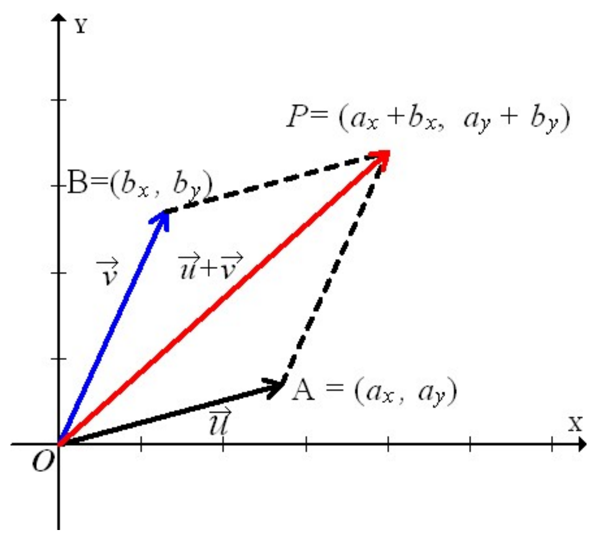
1.4.3. Operaciones con vectores del plano

A continuación se describirán las operaciones con vectores, conocidas sus componentes rectangulares.

Dados los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (a_x,\, a_y)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (b_x,\, b_y)$.

a) **Suma de vectores**. La suma de los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ obtenida analíticamente, es el vector que se obtiene sumando las componentes correspondientes de los vectores.

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (a_x,\, a_y) + (b_x,\, b_y) = (a_x + b_x,\, a_y + b_y)$$

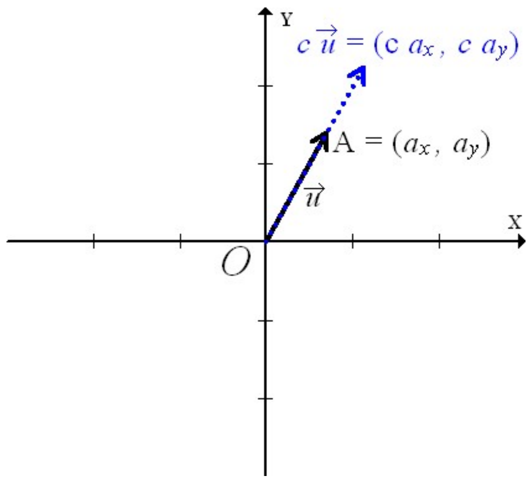


Observaciones.

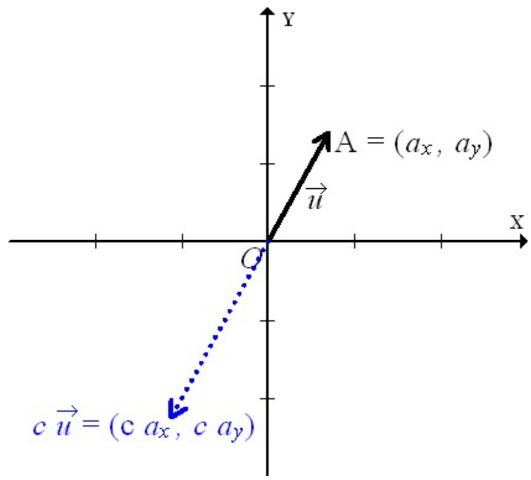
- El vector *resultante* obtenido coincide con el vector $\overrightarrow{OP}$ determinado geométricamente donde OP es la diagonal del paralelogramo $OAPB$.
- La diferencia entre los vectores dados, es el vector: $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = (a_x - b_x,\, a_y - b_y)$.

b) **Multiplicación por un escalar**. El producto de un vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OP} = (a_x,\, a_y)$ por un número real c es el vector:

$$c\,\overrightarrow{u} = c\,(a_x,\, a_y) = (c\,a_x,\, c\,a_y)$$



$c > 0$: los vectores $\overrightarrow{u}$ y $c\overrightarrow{u}$
tienen igual dirección y sentido



$c < 0$: los vectores $\overrightarrow{u}$ y $c\overrightarrow{u}$
tienen igual dirección y sentido contrario

1.4.4. Producto punto y Ángulo entre dos vectores

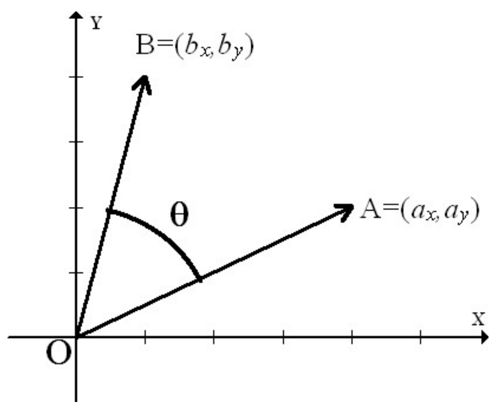
Definición. Sean $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA} = (a_x,\, a_y)$ y $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB} = (b_x,\, b_y)$ dos vectores en el plano. El producto punto entre $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, denotado por $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ es el número real:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (a_x,\, a_y) \cdot (b_x,\, b_y) = a_x b_x + a_y b_y$$

Nota. El símbolo $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ se lee "$\overrightarrow{u}$ punto $\overrightarrow{v}$".

Teorema. Si θ es el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{u} = (a_x,\, a_y)$ y $\overrightarrow{v} = (b_x,\, b_y)$, entonces:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}||\, \cos\theta$$



Ángulo entre dos vectores.
La siguiente fórmula, que se deduce del teorema anterior, permite determinar el ángulo θ que forman los vectores $\overrightarrow{u} = (a_x,\, a_y)$ y $\overrightarrow{v} = (b_x,\, b_y)$:

$$\cos\theta = \frac{a_x b_x + a_y b_y}{||\overrightarrow{u}||\, ||\overrightarrow{v}||}$$

Esta fórmula es muy utilizada en aplicaciones de los vectores. Por ejemplo, para determinar el ángulo formado por los segmentos brazo y antebrazo conociendo los vectores que definen la posición de ambos.