Tema 1

Funciones reales

1.1 Funciones

Una función es una relación entre dos conjuntos dados. Más precisamente, una ***función*** es una regla que asigna a cada elemento de un primer conjunto un único elemento de un segundo conjunto.

Ejemplo 1.1 *Pensemos en el conjunto de ciudades de Chile. Si a cada ciudad le asignamos el número de sus habitantes al 18 de septiembre, entonces estamos definiendo una función entre las ciudades de Chile y el conjunto de números naturales.*

Ejemplo 1.2 *Supongamos que durante los primeros diez cumpleaños de Juanito se toma lectura de su peso. Si a cada año de vida asignamos el peso correspondiente de Juanito, entonces estamos construyendo una función entre el conjunto de los primeros diez números naturales y los números reales.*

Ejemplo 1.3 *Pensemos en el conjunto de números enteros* $\mathbb{Z}$*. Si a cada entero le asociamos su cuadrado, entonces estamos definiendo una función entre* $\mathbb{Z}$ *y el conjunto de números naturales* $\mathbb{N}$.

1.2 Dominio y codominio

Supongamos que f es una función definida entre dos conjuntos X y Y, de forma que f asigna a cada elemento de X un único elemento de Y. Entonces, decimos que X es el ***dominio*** de f, $dom(f)$, y Y es el ***codominio*** de f, $cod(f)$.

Ejemplo 1.4 *Regresando al ejemplo de Juanito, tenemos que el dominio de la función es*

$$X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$$

y el codominio es

$$Y = \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.5 *Regresando al ejemplo del cuadrado de un número entero, tenemos que el dominio de la función es*

$$X = \mathbb{Z}$$

y el codominio es

$$Y = \mathbb{N}.$$

La notación para indicar que f es una función entre X y Y es:

$$f : X \to Y,$$

y la regla de asociación se indica por $x \mapsto f(x)$.

Ejemplo 1.6 *La función y regla de asociación del cuadrado de un número entero se escriben:*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \qquad x \mapsto x^2.$$

1.3 Imagenes y preimagenes

Si una función f asigna un valor y en el codominio Y a un elemento x del dominio X, entonces escribimos

$$y = f(x).$$

El valor y es la ***imagen*** de x. La imagen, $Im(f)$, de la función f es la unión de todas la imagenes del dominio, esto es,

$$Im(f) = \{y \in Y \,|\, \text{existe } x \in X \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

La ***preimagen***, $f^{-1}(y)$, de un valor y en el codominio Y es el conjunto de elementos x del dominio X tal que $f(x) = y$, esto es,

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \,|\, f(x) = y\}$$

Una función f es llamada ***inyectiva*** si cualesquiera dos elementos distintos en el dominio tienen imagenes distintas en el codominio, es decir,

$$\text{Si } x_1 \neq x_2 \in X \text{ entonces } f(x_1) \neq f(x_2) \in Y.$$

Una función f entre X y Y es llamada ***suprayectiva o sobreyectiva*** si $Im(f) = Y$.
Una función f entre X y Y es llamada ***biyectiva*** si es inyectiva y suprayectiva.

Ejemplo 1.7 *Consideremos la función*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \qquad x \mapsto x^2.$$

- *La imagen del 3 es el 16.*
- *81 es la imagen de 9.*
- *La preimagen de 5 es el conjunto vacío.*

- *La preimagen de 36 es el conjunto* $\{6, -6\}$.
- *La función NO es inyectiva.*
- *La función NO es suprayectiva.*

Ejemplo 1.8 *Consideremos la función*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}, \qquad x \mapsto 2x.$$

- *La imagen del 3 es el 6.*
- *8 es la imagen de 4.*
- *La preimagen de 5 es el conjunto vacío.*
- *La preimagen de 12 es el conjunto* $\{6\}$.
- *La función ES inyectiva.*
- *La función NO es suprayectiva.*

1.4 Variables dependientes e independientes

El concepto de función tambien expresa la idea de que una cantidad depende o está determinada por otra u otras.

Ejemplo 1.9 *Los ejemplos siguientes aclaran esta idea.*

1) El área de un círculo depende de su radio; si se conoce el radio podemos determinar el área. Decimos que el área es función del radio.

2) La cantidad de producto que un fabricante ofrecerá depende del precio que puede obtener. La cantidad es función del precio.

3) La distancia recorrida por un tren depende de la velocidad del tren y el tiempo transcurrido. La distancia es función de la velocidad y del tiempo.

Si una función f se expresa por la relación $y = f(x)$, entonces f es una función de una variable, y recibe el nombre de variable dependiente y x es llamada la variable independiente. En otras palabras, el elemento genérico del codominio recibe el nombre de ***variable dependiente***. El eleménto genérico del dominio recibe el nombre de ***variable independiente***.

Ejemplo 1.10 *Conversión de temperatura en grados Fahrenheit,* T^oF*, a temperatura en grados Celsius* T^oC*:*

$$T^oC = \frac{T^oF - 32}{1,8}.$$

Así, la temperatura en grados Celsius es función de la temperatura en grados Fahrenheit. El T^oC *es la variable dependiente y* T^oF *es la variable independiente.*

Si una función f se expresa por la relación $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, entonces se dice que f es una ***función de varias variables***, y es la variable dependiente y $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son variables independientes.

Ejemplo 1.11 *El índice de masa corporal (IMC) depende del peso y la talla de un individuo:*

$$IMC = f(peso, estatura) = \frac{peso}{(estatura)^2}.$$

Así, el IMC es función del peso y talla. El IMC es la variable dependiente. El peso y la estatura son variables independientes.

1.5 Funciones con condiciones

Algunas situaciones necesitan ser modeladas por funciones con condiciones.

Ejemplo 1.12 *Sabemos que el agua corporal total (ACT) es función del peso P (en kg) y depende del tipo de individuo. Así la función que asigna la cantidad de ACT a cada habitante del edificio X la podemos representar como*

$$f : X \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \begin{cases} (0.6)P(x) & \textit{para hombres} \\ (0.5)P(x) & \textit{para mujeres} \\ (0.5)P(x) & \textit{para ancianos} \\ (0.45)P(x) & \textit{para ancianas} \end{cases}$$

donde $P(x)$ es la función que asigna a cada habitante x de X su peso en kg.

Ejemplo 1.13 *Consideremos la función con condiciones*

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \qquad z \mapsto f(z) = \begin{cases} 2z + 1 & \textit{si } z \geq 0, \\ -2z & \textit{si } z < 0. \end{cases}$$

- *La imagen del 3 es el 7.*
- *6 es la imagen de -3.*
- *La preimagen de 5 es el conjunto $\{2\}$.*
- *La preimagen de 12 es el conjunto $\{-6\}$.*
- *La función ES inyectiva.*
- *La función ES suprayectiva.*
- *La función ES biyectiva.*

1.6 Gráficas de funciones

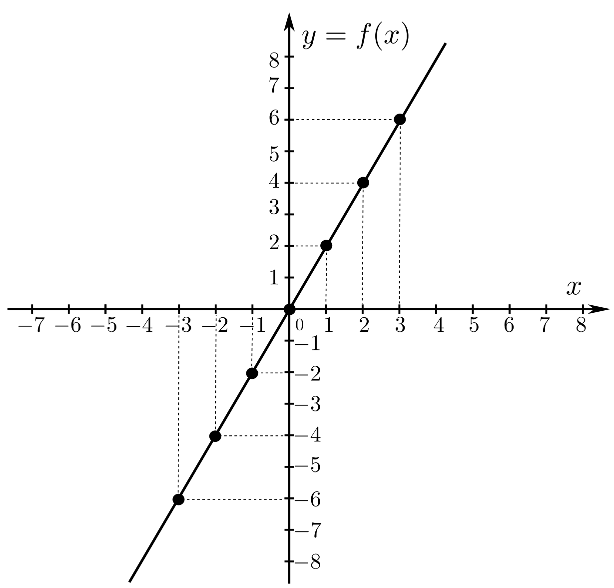
Los dominions y codominios de las funciones que nos interesaran seran subconjunos de los numeros reales. En tales casos las funciones pueden representarse mediante una gráfica en un plano cordenado $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La ***gráfica*** de la función se obtine al dibujar todos los puntos (x, y) en el plano, donde x pertence al dominio de f y el valor y es tal que $y = f(x)$.

Es útil realizar una tabla que nos permita encontrar los valores de los puntos o pares (x, y) que posteriormente representaremos en el plano coordenado $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.14 *Consideremos la función*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto 2x.$$

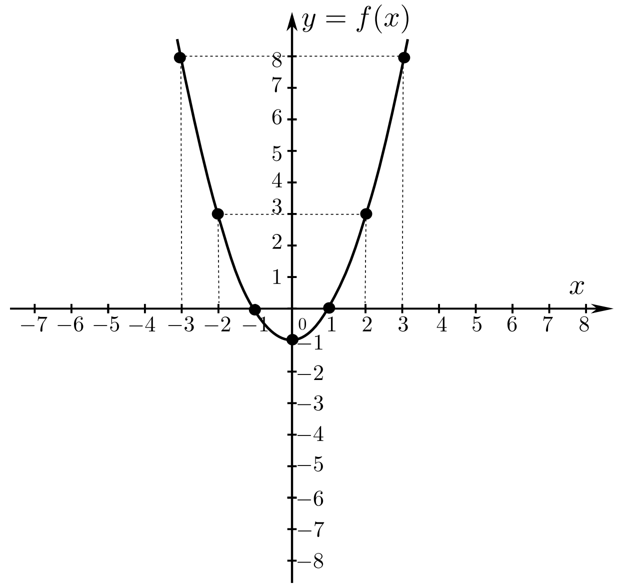
x	*y=f(x)*
3	*6*
2	*4*
1	*2*
0	*0*
-1	*-2*
-2	*-4*
-3	*-6*



Ejemplo 1.15 *Consideremos la función*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto x^2 - 1.$$

x	$y{=}f(x)$
3	8
2	3
1	0
0	-1
-1	0
-2	3
-3	8



Ejemplo 1.16 *Consideremos la función*

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N} \qquad x\mapsto f(x)=\begin{cases}2x+1 & si\ x\geq 0,\\ -2x & si\ x<0.\end{cases}$$

x	$y{=}f(x)$
3	7
2	5
1	3
0	1
-1	2
-2	4
-3	6