

1) (20 pts) Sobre cálculo de límites y derivadas.

Calcular algebraicamente (no se aceptan tablas de valores ni gráficos en la respuesta), de manera clara, ordenada y mostrando todos los pasos:

a) [10 pts] $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3+x}{9-x^2}$

Desarrollo:

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3+x}{9-x^2} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3+x}{(3-x)(3+x)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{3-x} = \frac{1}{6}$$

b) [10 pts] $\frac{d}{dx} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x} + 3x^3 \right)$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x} + 3x^3 \right) &= \frac{d}{dx} (4x^{-1/2} - x^{1/3} + 3x^3) \\ &= \frac{d}{dx} (4x^{-1/2}) - \frac{d}{dx} (x^{1/3}) + \frac{d}{dx} (3x^3) \\ &= 4 \frac{d}{dx} (x^{-1/2}) - \frac{d}{dx} (x^{1/3}) + 3 \frac{d}{dx} (x^3) \\ &= 4 \cdot -\frac{1}{2} x^{-3/2} - \frac{1}{3} x^{-2/3} + 3 \cdot 3x^2 \\ &= -2x^{-3/2} - \frac{1}{3} x^{-2/3} + 9x^2 \end{aligned}$$

2) (20 pts) Aplicaciones de la derivada

En un movimiento rectilíneo, la posición de un automóvil a las t horas es:

$$s = 50t - \frac{7}{t+1}$$

con s en kilómetros.

- a) [10 pts] ¿Cuál es la velocidad (instantánea) a las 2 horas?

Desarrollo:

- $v = \frac{d}{dt} \left(50t - \frac{7}{t+1} \right) = 50 + \frac{7}{(t+1)^2}$, luego
- $v(2) = \frac{457}{9} \approx 50,78$

Respuesta: La velocidad (instantánea) a las 2 horas es igual a $50,78 \frac{km}{h}$

- b) [10 pts] ¿Cuál será la aceleración del automóvil cuando el número de horas crece indefinidamente?

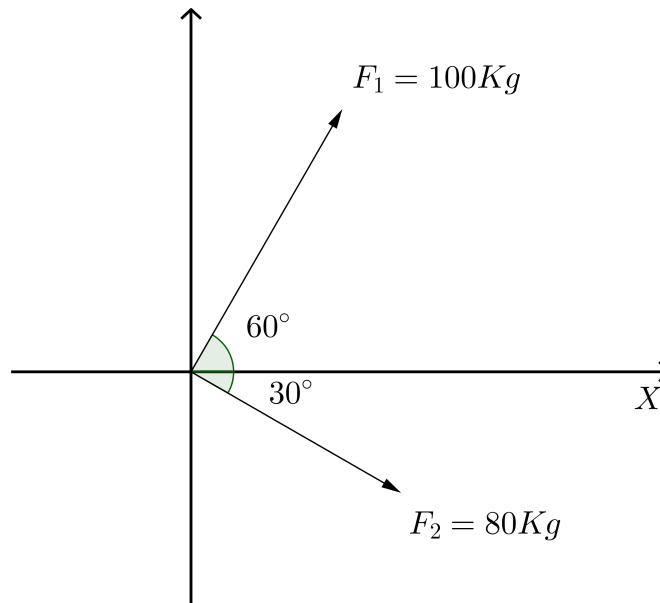
Desarrollo:

$$a = v' = \frac{d}{dt} \left(50 + \frac{7}{(t+1)^2} \right) = -\frac{14}{(t+1)^3}$$

Respuesta: Cuando t crece, v se acerca a 0

3) (20 pts) Vectores

Aldo, Mauricio y usted desean empujar un objeto en la dirección del eje X . Aldo empuja con la fuerza F_1 y Mauricio con la fuerza F_2 (cuyos valores y sentidos están indicados en la siguiente figura).



- a) [10 pts] Calcular las componentes de las fuerzas ejercidas por Aldo y Mauricio

Desarrollo:

- $\vec{F}_1 = (100 \cos(60^\circ), 100 \sin(60^\circ)) = (50, 50\sqrt{3}) = \boxed{(50, 86.6)}$
- $\vec{F}_2 = (80 \cos(30^\circ), -80 \sin(30^\circ)) = (40\sqrt{3}, -40) = \boxed{(69.28, -40)}$

- b) [10 pts] Encontrar intensidad y dirección de la fuerza con la cual usted debe tirar el objeto, para lograr el objetivo indicado (empujar un objeto en la dirección del eje X)

Desarrollo: Sea \vec{F} la fuerza resultante de las fuerzas aplicadas por Aldo y Mauricio. Luego:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (119.28, 46.6)$$

luego, una fuerza \vec{F}_3 , que yo debo aplicar para que el objeto sea empujado en la dirección del eje positivo X , es

$$\vec{F}_3 = (0, -46.6)$$

Observar que la primera componente del vector \vec{F}_3 puede ser cualquier valor positivo.