Sesión 11

Teorema fundamental del Cálculo (TFC)

Temas	***Capacidades***
✓ *Teorema fundamental del Cálculo.*	▷ *Conocer y comprender el TFC.* ▷ *Aplicar el TFC en el cálculo de derivadas e integrales definidas.*

11.1 Introducción

I. Barrow
Inglés. 1630 - 1677.

Cada rama especial de la matemática tiene un teorema que se reconoce como fundamental en ella. Así es como en la aritmética se encuentra el Teorema fundamental de la aritmética[a], en álgebra el Teorema fundamental del álgebra[b]. También el cálculo tiene su teorema fundamental, que se conoce justamente con el nombre de Teorema fundamental del Cálculo, y su importancia radica en relacionar los dos temas claves del cálculo: la derivada y la integral.

[a] Todo número entero se puede escribir, de manera única (excepto el orden de los factores), como producto de potencias de números primos.

[b] Toda ecuación con coeficientes reales, tiene al menos una raíz (real o compleja).

11.2 Teorema Fundamental del Cálculo

El teorema fundamental del Cálculo tiene, tal como se ve a continuación, dos partes.

Teorema 11.1. *Teorema Fundamental del Cálculo (TFC-1)*

Sea f una función continua en $[a, b]$. Si

$$G(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \text{ para todo } x \text{ en } [a, b],$$

entonces G es una antiderivada (primitiva) de f, es decir: $G'(x) = f(x)$

Demostración.

Sea $x_1 \in [a, b]$ y Δx tal que $x_1 + \Delta x \in [a, b]$.

$$\begin{aligned}
G'(x_1) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{G(x_1 + \Delta x) - G(x_1)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x_1+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_a^{x_1+\Delta x} f(t)dt + \int_{x_1}^{a} f(t)dt}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x_1}^{a} f(t)dt + \int_a^{x_1+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} \\
&\quad \text{aplicando el Teorema del valor medio para integrales:} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\alpha)\Delta x}{\Delta x}, \quad \text{para } \alpha \text{ entre } x_1 \text{ y } x_1 + \Delta x \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} f(\alpha) \\
&\quad \text{como } f \text{ es continua y } \alpha \text{ entre } x_1 \text{ y } x_1 + \Delta x \\
&= f(x_1)
\end{aligned}$$

■

Nota 11.1. El TFC-1, establece que toda función continua tiene primitiva.

Ejemplo 11.1. *Determinar las derivadas de*

$$a)\ g(x) = \int_1^x \frac{1}{t+t^2}\,dt \qquad b)\ h(t) = \int_0^{t^3} \frac{1}{2+x^2}\,dx$$

Solución:

a) $g'(x) = \dfrac{1}{x+x^2}$, *por el TFC(1).*

b) *Sean* $f(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{1}{2+x^2}\,dx$ *y* $g(t) = t^3$. *Entonces,* $h = f \circ g$.

Es claro que: $f'(t) = \dfrac{1}{2+t^2}$.

Por lo tanto:

$$h'(t) = (f \circ g)'(t) = f'(g(t)) \cdot g'(t) = \frac{1}{2+(t^3)^2} \cdot 3t^2 = \frac{3t^2}{2+t^6}$$

Nota 11.2. La segunda parte del ejemplo precedente ilustra el siguiente corolario del TFC-1:

Corolario 11.2.1. *TFC-1a*

Sean f *una función continua en* $[a,b]$ *y* g *una función derivable. Si*

$$G(x) = \int_a^{g(x)} f(t)\,dt, \text{ para todo } x \text{ en } [a,b],$$

entonces G *es derivable y su derivada viene dada por*

$$G'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Ejercicio 11.1. *Encontrar el intervalo sobre el cual la curva* $y = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}\,dt$ *es cóncava hacia arriba.*

Teorema 11.2. *Teorema Fundamental del Cálculo (TFC-2)*

Sea f una función continua en el intervalo $[a,b]$ y F *una* primitiva (antiderivada) cualquiera de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Demostración. Por el teorema 11.1, $G(x) = \int_a^x f(t)dt$ es una primitiva de f. Luego F y G son primitivas de f, es decir, $F' = G' = f$. Luego, F y G difieren en una constante, es decir,

$$G(x) = F(x) + C$$

o sea,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C \tag{11.1}$$

sustituyendo x por a en (11.1), se obtiene que $C = -F(a)$. Luego:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \tag{11.2}$$

Finalmente, sustituyendo x por b en (11.2), se obtiene el resultado deseado:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Observaciones:

1) El TFC-2 entrega una herramienta, simple y poderosa, para calcular una integral de Riemann (o definida), sin tener que recurrir a la definición, que como ya se ha visto, en general es bastante complicado utilizarla. Esta manera de evaluar una integral definida, se conoce con el nombre de *Regla de Barrow.*

2) Como F es una primitiva de f, es claro que:

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Como es de suponer, para calcular esta integral indefinida, se pueden utilizar todas las fórmulas de integración y todos los métodos de integración ya estudiados.

En la integral indefinida calculada, se suele tomar la constante de integración igual a 0, es decir $C = 0$.

3) Es frecuente denotar la expresión $F(b) - F(a)$ por $F(x)\Big|_a^b$. Con esta notación, el TFC-2, se puede presentar así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$$

4) Para calcular la integral de Riemann,

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

usando el TFC-2, se procede de la siguiente manera:

Paso 1: Buscar una primitiva de la función f. Para ello se calcula

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

Paso 2: Una vez encontrada la función F, ella se evalúa en $x = b$ y en $x = a$, es decir, se calcula $F(b)$ y $F(a)$

Paso 3: Finalmente, aplicando el TFC-2, se obtiene que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 11.2. *Encontrar el valor de* $\displaystyle\int_{-1}^{5} (1+x^2)\,dx$

Solución:

1) Calcular $\displaystyle\int (1+x^2)\,dx$

$$\begin{aligned}\int (1+x^2)\,dx &= \int dx + \int x^2\,dx \\ &= x + \frac{x^3}{3}\end{aligned}$$

2) Luego,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{5} (1+x^2)\,dx &= \left(x + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{5} \\ &= \left(5 + \frac{5^3}{3}\right) - \left(-1 + \frac{(-1)^3}{3}\right) \\ &= \left(5 + \frac{125}{3}\right) - \left(-1 - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{140}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= 48\end{aligned}$$

11.3 Autoevaluación

1) Calcular la derivada de $\int_1^t \frac{dx}{1+x^3}$.

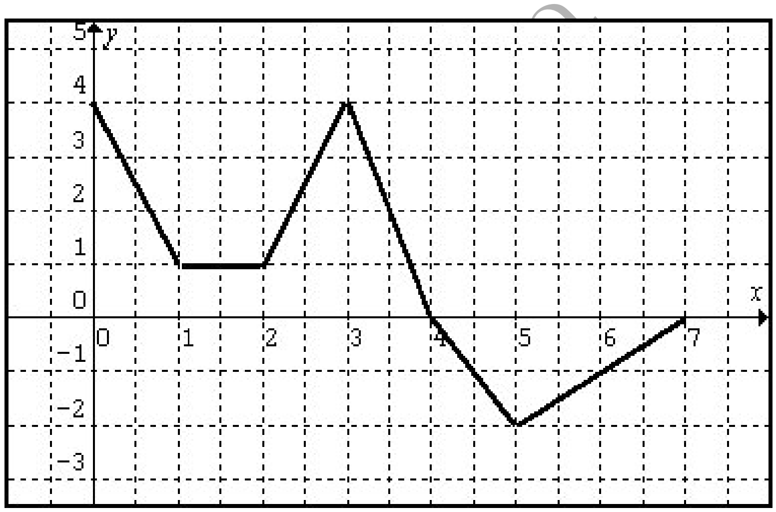
2) Calcular la derivada de $\int_1^{t^3} \frac{dx}{1+x^3}$.

3) Calcular el área bajo la curva $y = \sin^2 x$ entre 0 y 2π.

Respuesta: 1) $\dfrac{1}{1+t^3}$ 2) $\dfrac{3t^2}{1+t^9}$ 3) π

11.4 Desafío

Sea f la función definida por el siguiente gráfico:



Si $g(t) = \displaystyle\int_1^t f(x)dx$:

1) Determinar los valores de $g(0)$, $g(2)$, $g(4)$ y $g(7)$

2) Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento de g.

3) Determinar extremos relativos y absolutos de g.

4) Esbozar una gráfica e la función g.