1. Estudiar extremos relativos de la función $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

Desarrollo.

Paso 1: Encontrar las derivadas parciales de $z = f(x, y)$: z_x y z_y.

$$\begin{array}{rcl} z_x & = & 2x + y - 6 \\ z_y & = & x + 2y \end{array}$$

Paso 2: Buscar los puntos críticos de f

a) Resolver el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} z_x & = & 0 \\ z_y & = & 0 \end{array}\right|$$

En este caso, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 6 \\ x + 2y & = & 0 \end{array}\right|$$

Resolviendo este sistema, se obtiene el punto crítico: $(4, -2)$.

b) Buscar puntos donde no exista z_x o z_y.
En este caso, como tanto z_x y z_y están definidas en todo el plano, no hay puntos críticos provenientes de esta condición.

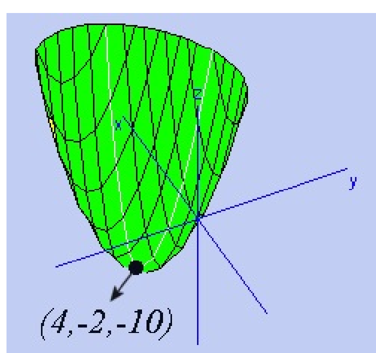
Paso 3: Análisis de los puntos críticos

a) Calcular z_{xx}, z_{yy} y z_{xy}: $z_{xx} = 2$, $z_{yy} = 2$ y $z_{xy} = 1$

b) Formar $D = D(x, y) = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2$: $D = D(x, y) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3$

Análisis del punto crítico $(4, -2)$

$D(4, -2) = 3$, y como $z_{xx}(4, -2) = 2 > 0$, en $(4, -2)$ la función analizada tiene un mínimo igual a $z = f(4, -2) = 4^2 + 4(-2) + (-2)^2 - 6(4) + 2 = -10$



El punto mínimo de $z = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

UTALCA

2. Estudiar extremos relativos de la función $z = f(x,y) = 3xy - x^2y - xy^2$

Desarrollo.

Paso 1: Encontrar las derivadas parciales de $z = f(x,y)$: z_x y z_y.

$$\begin{aligned} z_x &= 3y - 2xy - y^2 \\ z_y &= 3x - x^2 - 2xy \end{aligned}$$

Paso 2: Buscar los puntos críticos de f

a) Resolver el sistema:

$$\left.\begin{aligned} z_x &= 0 \\ z_y &= 0 \end{aligned}\right|$$

En este caso, el sistema es:

$$\left.\begin{aligned} 3y - 2xy - y^2 &= 0 \\ 3x - x^2 - 2xy &= 0 \end{aligned}\right|$$

Resolviendo este sistema, se obtienen los puntos críticos: $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (0,3)$, $P_3 = (3,0)$ y $P_4 = (1,1)$

b) Buscar puntos donde no exista z_x o z_y.
En este caso, como tanto z_x y z_y están definidas en todo el plano, no hay puntos críticos provenientes de esta condición.

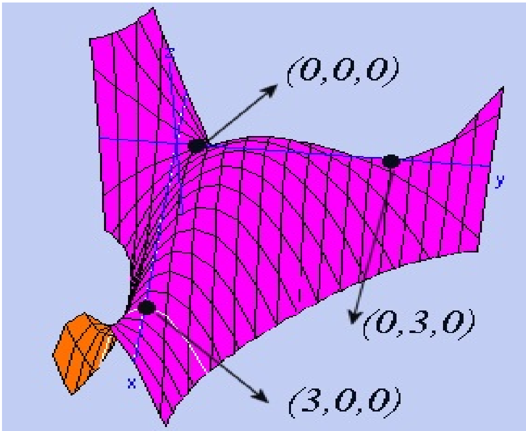
IMAFI

Paso 3: Análisis de los puntos críticos

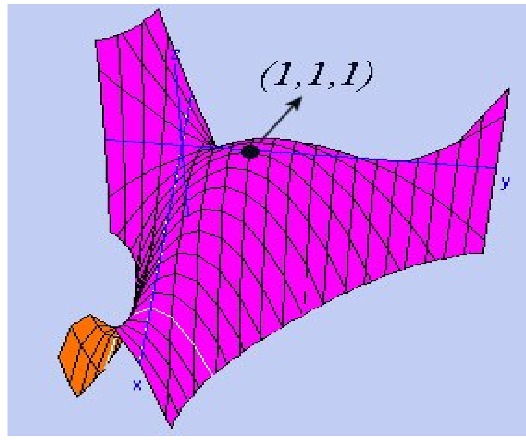
a) Calcular z_{xx}, z_{yy} y z_{xy}: $z_{xx} = -2y$, $z_{yy} = -2x$ y $z_{xy} = 3 - 2x - 2y$

b) Formar $D = D(x,y) = z_{xx} \cdot z_{yy} - (z_{xy})^2$:
$D = D(x,y) = (-2y) \cdot (-2x) - (3 - 2x - 2y)^2 = 4xy - (3 - 2x - 2y)^2$

- **Análisis del punto crítico** $P_1 = (0,0)$
  $D(0,0) = -9 < 0$. Luego, en $P_1 = (0,0)$ no hay extremo.
- **Análisis del punto crítico** $P_2 = (0,3)$
  $D(0,3) = -9 < 0$. Luego, en $P_2 = (0,3)$ no hay extremo.
- **Análisis del punto crítico** $P_3 = (3,0)$
  $D(3,0) = -9 < 0$. Luego, en $P_2 = (0,3)$ no hay extremo.
- **Análisis del punto crítico** $P_4 = (1,1)$
  $D(1,1) = 3 > 0$ y como $z_{xx}(1,1) = -2 < 0$, en $(4,-2)$ la función analizada tiene un máximo igual a $z = f(1,1) = 1$



Los tres puntos sillas de
$f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$



El punto máximo de
$f(x, y) = 3xy - x^2y - xy^2$

3. Un editor tiene que distribuir U\$ 60000 para gastos de desarrollo y promoción de un nuevo libro. Se estima que si gasta en desarrollo U\$ x miles y en promoción U\$ y miles, se venderán aproximadamente $N = 20x^{\frac{3}{2}}y$ ejemplares del libro. Usando multiplicadores de Lagrange determinar cuánto dinero debe dedicar el editor a desarrollo y cuánto a promoción con objeto de maximizar las ventas.

   Desarrollo.

   La función a maximizar es $N(x, y) = 20x^{\frac{3}{2}}y$ con sus variables x e y sujetas a las restricción $g(x, y) = x + y = 60$. Luego el problema es:

$$\begin{array}{lcl} \text{Maximizar} & : & N(x,y) = 20x^{\frac{3}{2}}y \\ \text{Sujeto a} & : & x + y - 60 = 0 \end{array}$$

   Se considera la función:

$$L(x, y, \lambda) = 20x^{\frac{3}{2}}y + \lambda(x + y - 60)$$

   Luego:

$$\begin{array}{ll|} (1) & L_x = 20 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}y + \lambda \;=\; 0 \\ (2) & L_y = 20x^{\frac{3}{2}} + \lambda \;=\; 0 \\ (3) & L_\lambda = x + y - 60 \;=\; 0 \\ \hline \end{array}$$

   Despejando λ de (1) y (2), e igualando sus valores, se tiene que:

$$30x^{\frac{1}{2}}y = 20x^{\frac{3}{2}} \implies y = \frac{2}{3}x.$$

   Sustituyendo en (3) nos da: $x = 36$. Luego $y = \frac{2}{3} \cdot 36 = 24$.

   Respuesta: El editor debe dedicar U\$ 36000 a gastos de desarrollo y U\$ 24000 a promoción, para maximizar las ventas, sujetas a la restricción de presupuesto indicada.