

“obse”

Observaciones No hay consultas. Responder una pregunta por hoja. Las respuestas sin desarrollo y/o justificación no dan puntaje. Duración 1 hora 30 minutos.

1. (20 ptos.) Identidades y ecuaciones trigonométricas

a) Verificar la siguiente identidad trigonométrica:

$$\tan x + \cot x = \sec x \cdot \csc x$$

Solución:

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x &= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x} \\ &= \frac{1}{\cos x \sin x} \\ &= \sec x \cdot \csc x \end{aligned}$$

b) Encontrar todas las soluciones principales de la ecuación trigonométrica:

$$\sin^2 x + \sin x = \cos^2 x$$

Solución:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \sin x &= \cos^2 x \\ \sin^2 x + \sin x &= 1 - \sin^2 x \\ 2 \sin^2 x + \sin x - 1 &= 0 \\ \underbrace{(2 \sin x - 1)}_{(1)} \underbrace{(\sin x + 1)}_{(2)} &= 0 \end{aligned}$$

de (1) $\sin x = \frac{1}{2}$, de donde $x_1 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$

de (2), $\sin x = -1$. de donde $x_3 = 270^\circ = \frac{3\pi}{2}$

Respuesta: Las soluciones principales son: $x_1 = 30^\circ$, $x_2 = 150^\circ$ y $x_3 = 270^\circ$

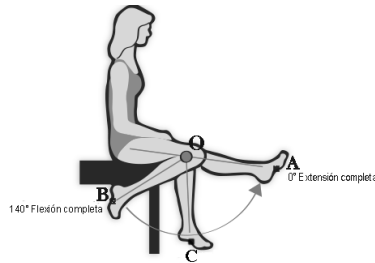
2. (20 ptos.) Funciones trigonométricas asociadas

La marea en una playa subió al amanecer. Con respecto a un eje vertical, el nivel del agua durante la marea alta fue de 60cm, más tarde, en la marea baja, fue de -60 cm. Suponiendo que a la 0 horas (medianoche) la altura del agua era de 0cm, y que 20 horas después, nuevamente la altura de la marea fue de 0cm. Hallar una función del tipo $y = g(x) = A \sin(Bt) + C$, para modelar el nivel del agua como función del tiempo.

Solución: $y = 60 \sin\left(\frac{\pi}{20}x\right)$

3. (20 pts.) Un problema de trigonometría

La distancia entre la rodilla y la planta del pie de la persona en la figura es de 42.5cm.



- a) Calcular la distancia entre las posiciones **A** (0° Extensión completa) y **B** (140° Flexión completa), sabiendo que, tal como se indica en la figura, $\angle AOB = 140^\circ$.

Solución:



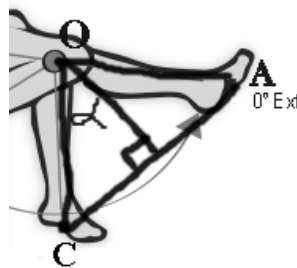
En el $\triangle AOB$, por el teorema de los cosenos, se tiene

$$AB^2 = (42,5)^2 + (42,5)^2 - 2 \cdot (42,5) \cdot (42,5) \cdot \cos(140^\circ)$$

de donde

$$AB \approx 77,04\text{cm}$$

- b) Si la distancia entre A y C son 53cm, determinar el ángulo $\angle AOC$



En este triángulo rectángulo:

$$\sin \alpha = \frac{53/2}{42,5}$$

de donde

$$\alpha \approx 77,14^\circ$$