1. Desafío inicial

Modelar matemáticamente la siguiente situación:

> En una pastelería se fabrican dos clases de tortas. La primera necesita 2,4 Kg de harina y 3 horas de elaboración. La segunda necesita 4 Kg de masa y 2 horas de elaboración. Calcular el número de tortas elaboradas de cada tipo si se han dedicado 67 horas de trabajo y 80 Kg de harina.

2. Ecuaciones lineales en dos variables

2.1. Conceptos básicos

Una ecuación lineal (E.L.) en dos variables, por ejemplo en las variables x e y, es una ecuación de la forma:

$$ax + by = c$$

donde a, b y c son números reales.

2.1.1. Ejemplos de E.L. en dos variables

$$2x + 3y = 6, \qquad 2x - y = 0 \qquad x - y = y + 2$$

Notar que $x - xy = 3 \qquad \frac{1}{x} - x + 2y = 3$ no son E.L.

2.2. Resolución de E.L.

Resolver la ecuación lineal $ax + by = c$ en $\mathbb{R}^2$, consiste en determinar todos los pares de números reales, (x, y), que satisfacen la ecuación.

2.3. Conjunto solución

El *conjunto solución* de la ecuación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ ax + by = c \ \}$$

es el conjunto de todos los pares ordenados de $\mathbb{R}^2$, que satisfacen dicha ecuación.

2.3.1. Ejemplo

El conjunto solución de la E.L.

$$2x - 3y = 4$$

es

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - 3y = 4\} = \left\{ \left(x, \frac{2x - 4}{3} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}.$$

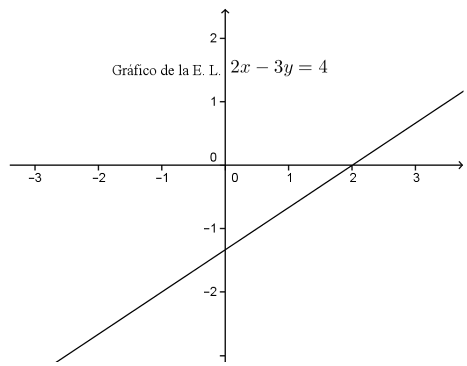
Algunos elementos de S son $(5, 2)$ y $(0, -\frac{4}{3})$, etc.

2.3.2. Solución gráfica

En $\mathbb{R}^2$, el conjunto solución de la ecuación $ax + by = c$, con $a \neq 0$ o $b \neq 0$, se representa por una línea recta.

2.3.3. Ejemplo

El gráfico del conjunto solución de la E.L. $2x - 3y = 4$ es la recta:



3. Sistema de ecuaciones en dos variables (SEL)

3.1. ¿Qué son?

Un conjunto de dos ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} ax + by & = & c \\ px + qy & = & r \end{array}\right| \qquad (*)$$

con dos incógnitas o variables x e y, se denomina *sistema de dos ecuaciones lineales*, donde a, b, p y q son los *coeficientes del sistema*, y los términos c y r son los *términos independientes* o *constantes del sistema*. Los coeficientes y las constantes del sistema son números reales.

3.2. Solución de SEL

Una solución de un SEL con dos incógnitas, es todo par ordenado de números reales (x, y), que satisfacen cada una de las ecuaciones que conforman el sistema.
Al proceso de determinar todas las soluciones de un sistema se le denomina: *resolver el sistema*.

3.3. Resolución de un sistema

Al proceso de determinar todas las soluciones de un sistema se le denomina: *resolver el sistema*.
En general, un SEL, puede tener o no soluciones. En el primer caso se dice *consistente*, y en el segundo *inconsistente*. Cuando un SEL es consistente, puede tener *una única solució*n, o bien *infinitas soluciones*.

3.4. Métodos algebraicos para resolver un SEL

Para resolver un SEL existen métodos: tres algebraicos y uno gráfico.

4. Inecuaciones lineal en dos variables

Una *inecuación lineal en dos variables* x e y es una expresión del tipo:

$$ax + by + c \underbrace{<}_{>,\leq,\geq} 0 \qquad (*)$$

4.1. Soluciones de una inecuación lineal

- Un par ordenado (x_0, y_0) es *solución* de la inecuación (*), si y solo si, al sustituir x por x_0 e y por y_0, se satisface la inecuación.
- *Conjunto solución* de la inecuación: $S = \{(x, y) \in R^2/(x, y)$ es solución de la inecuación$\}$

4.2. Gráfica de una desigualdad lineal

Ejemplo: Graficar la desigualdad $3x - 2y < 6$

P-1) Trazar la gráfica de la *ecuación asociada*.

Nota: Se grafica con linea *punteada* si la inecuación *tiene* $<$, o $>$. Y con linea continua, si *tiene* $\leq$ o $\geq$.

En el ejemplo: Graficar la ecuación $3x - 2y = 6$, con línea punteada. Esta recta determina dos regiones en el plano.

P-2) Tomar un **punto de prueba** (a, b), en una región (que no cumpla la ecuación), y determinar si el punto de prueba satisface la desigualdad.

En el ejemplo.

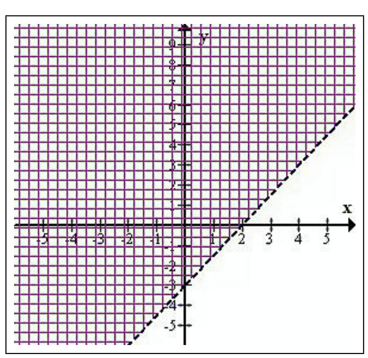
• Punto de prueba: (1, 0)
• ¿$3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 < 6$?: SI, luego $(1, 0)$ satisface la inecuación.

P-3) Si el punto de prueba (a, b) satisface la inecuación, entonces el conjunto solución S de la inecuación es:

- la región que contiene al punto (a, b) (si la desigualdad es $<$ o $>$), o bien
- la región que contiene al punto (a, b) junto con la recta (si la desigualdad es $\leq$ o $\geq$).

Nota. Si el punto de prueba no satisface la inecuación entonces el conjunto solución de la desigualdad es la otra región (con o sin la recta, dependiendo de la desigualdad).

En el ejemplo, la gráfica de la inecuación $3x - 2y < 6$ es la región que se encuentra sombreada en la figura, sin incluir la recta $3x - 2y = 6$ (se encuentra con linea punteada).



5. Sistema de inecuaciones en dos variables

Un conjunto de, al menos, dos inecuaciones lineales, por ejemplo

$$\left.\begin{array}{rcl} ax+by & < & c \\ px+qy & \geq & r \end{array}\right| \qquad (**)$$

Dado un sistema de inecuaciones en dos variables x e y.

- Un par ordenado (a,b) es solución del sistema de inecuaciones si y solo si, (a,b) satisface cada inecuación del sistema.
- El conjunto solución de un sistema de inecuaciones, es el conjunto:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y) \text{ es solución de cada inecuación}\}$$

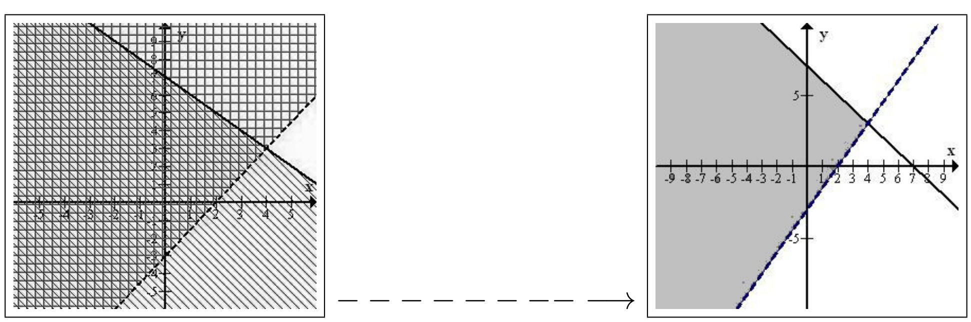
- Representación gráfica de un sistema de desigualdades es la región del plano, que contiene a todos los puntos que resuelven el sistema de desigualdades (intersección de todos los conj solucion de las desigualdad que forman el sistema).
- Interesa representar gráficamente el conjunto solución de sistemas de desigualdades lineales.

5.1. Ejemplo 1

Encontrar el gráfico del conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y<6 \\ \quad x+y \leq 7 \end{cases}$$

Solución:

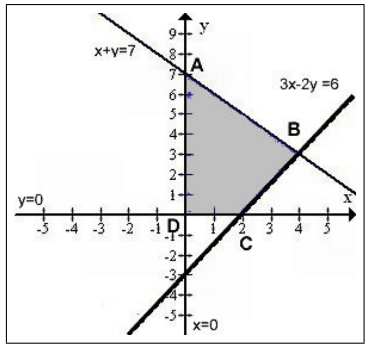


5.2. Ejemplo 2

Encontrar el gráfico del conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x-2y<6 \\ \quad x+y \leq 7 \\ \qquad x \geq 0 \\ \qquad y \geq 0 \end{cases}$$

Solución:



5.3. Ejemplo 3

Gráficar del conjunto solución del sistema:

$$\begin{cases} -x + y \leq 11 \\ x + y \leq 27 \\ 2x + 5y \leq 90 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$