TEMA: Idea intuitiva de Límite (1^{era} parte)

Introducción:

El cálculo infinistesimal es una rama de la matemática que se abre con un nuevo concepto: **límite de una FRVR**, el que permitirá abordar y resolver problemas más generales que los trabajados hasta este momento. Veamos, por ejemplo, algunos problemas ya resueltos junto a los que ahora podremos resolver:

Antes	Concepto de límite	**Después**
Calcular la pendiente de una recta	$\Longrightarrow$	Calcular la pendiente de una curva
Calcular una recta que pasa por dos puntos de una curva	$\Longrightarrow$	Calcular la tangente a una curva
Calcular la altura de una curva en $x = c$	$\Longrightarrow$	Calcular la **altura máxima** de una curva en un intervalo
Calcular el área de un rectángulo	$\Longrightarrow$	Calcular el área límitada por: arriba: gráfico de $y = f(x)$ abajo : Eje X izquierda : $x = a$ derecha : $x = b$
Longitud de un segmento	$\Longrightarrow$	Longitud de una porción de curva
Sumar un n£mero finito de términos		Sumar un número **infinito** de términos.
etc.		

Estudiar el comportamiento de la función $y = f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$; $x \neq 1$ (Notar que $1 \notin Dom f$) en las cercanías de x_1.

1. En este estudio lo que interesa es el comportamiento de f **cerca** de $x = 1$ (matemáticamente, esto se dice: en una **vecindad** de $x = 1$). Para esto nos **acercamos** al punto $x = 1$ tanto por la **izquierda** como por la **derecha**.

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}\,\mathbf{R}$$

$$\longrightarrow \ 1 \ \longleftarrow$$

(por la izquierda) (por la derecha)

Por la izquierda:

x	0,6	0,8	0,9	0,99	0,999	... $\rightarrow$ 1^-
$f(x)$						... $\rightarrow$

Por la derecha:

x	1,4	1,2	1,1	1,01	1,001	... $\rightarrow$ 1^+
$f(x)$						... $\rightarrow$

Usando la información de las tablas precedentes; responder:

a) ¿Cuándo nos **acercamos** a $x = 1$ por la izquierda, hacia dónde se **acercan las imágenes**?

b) idem por la derecha.

c) ¿Qué se puede concluir?

La conclusión recién aludida es:
"$f(x)$ se acerca a 3, cuando x se acerca a 1"

lo que también se puede anotar:

$$f(x) \longrightarrow 3, \quad \text{cuando} \quad x \longrightarrow 1$$

o bien;

$$(x \longrightarrow 1) \Rightarrow (f(x) \longrightarrow 3)$$

o bien;

$$f(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 3$$

En las relaciones precedentes al número 3 se le da el nombre de **límite de** $f(x)$ **cuando** $x \to 1$ y se anota

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Importante: Observar que en este estudio **no interesa** el comportamiento de la función **en el punto**, si no **a su alrededor**.

NO OLVIDAR ESTO !

2. Repetir el ejercicio precedente con la función

$$y = f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \tag{1}$$

en el punto $x = 2$.

¿Hay alguna diferencia entre las conclusiones de este ejercicio con el anterior? Comentar.

Nota . En este caso se tiene que

$$(x \to 2+) \longrightarrow (f(x) \to 1)$$

$$(x \to 2-) \longrightarrow (f(x) \to 6)$$

Lo que se anota:

$$\lim_{x \to 2+} f(x) = 6 \; ; \; \lim_{x \to 2-} f(x) = 1$$

y se llaman **límites laterales de** $f(x)$ **en** $x = 2$ (por la derecha e izquierda respectivamente).

Resultado Importante:

$\lim_{x \to a} f(x)$ existe si y solo si los límites laterales existen y **son iguales entre si**

es decir

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x) = L$$

Notar que cuando $\lim_{x \to a-} f(x) \neq \lim_{x \to a+} f(x)$ o uno de ellos no existe, entonces no existe $\lim_{x \to a} f(x)$

3. Considerar ahora la función: $y = f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-10}}$

   a) ¨Cómo se comporta esta función en $x = 10$?

   b) Determinar el dominio de f.

   c) Estudiar el comportamiento de f, cuando x se **acerca** a $x = 10$ por la izquierda y por la derecha. ¿Qué puede concluir?

4. Realiza un análisis similar para, determinar si existe el límite de la función dada en el punto propuesto.

   a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$; $x = 2$

   b) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; $x = 0$, x en radianes

   c) $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$; $x = 0$

   d) $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$; $x = 0$ *

   e) $l(y) = \dfrac{|y-5|}{y-5}$; $y = 5$

   f) $m(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$; $z = 0$

   (*) Notar que aquí $k(x)$ esta definida solo para $x \geq -1$, lo que es suficiente para estudiar su comportamiento en una vecindad de $x = 0$