1. Usando la definición de la pendiente de la recta tangente, encontrar una ecuación de la recta tangente a las curvas dadas en los puntos indicados. Además encontrar el área del triángulo que la recta tangente forma con los ejes coordenados.

   a) $y = f(x) = x^2 - x$, en su punto de abscisa $x = 2$.

   b) $y = f(x) = \sqrt{x}$, en su punto de ordenada $y = 25$

   c) $y = f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, en su punto de abscisa $x = 0$

2. En cierto *instante* la trayectoria de un móvil A sigue la siguiente ecuación:

$$s(t) = t^3 - 45t + 100$$

   Usando las definiciones correspondientes, determinar

   a) La rapidez promedio del móvil entre el segundo 2 y el segundo 4

   b) La rapidez (instantánea) y la aceleración (instantánea) del A, en un instante cualquiera

   c) La rapidez (instantánea) y velocidad (instantánea) en $t = 2$ y $t = 4$

   d) ¿En qué momento la velocidad (instantánea) es de 20 m/s?

   e) ¿En qué momento la rapidez (instantánea) y aceleración (instantánea) tiene igual valor numérico?

3. Usando la definición correspondiente, calcular la derivada de las siguientes funciones y determinar una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado:

   a) $y = \sqrt{x}$, en su punto $P = (1, 1)$

   b) $y = \frac{1}{x}$, en su puntos de abscisa $x = a$

4. Dada la curva C correspondiente al gráfico de la función $y = x^3 - x + 2$. Determinar el área del triángulo que forman su recta tangente en su punto $(2, 8)$, su recta normal (*recta perpendicular a la recta tangente*) en el punto $(2, 8)$ y el eje X. Hacer un gráfico de la situación planteada.

5. En cierto *instante* los móviles A y B cuyas trayectorias siguen, respectivamente, las siguientes ecuaciones:

$$s_1(t) = t^3 - 45t + 100 \qquad \text{y} \qquad s_2(t) = 3t^2 + 60t - 439$$

   donde s viene medido en metros y s en segundos.

   a) Calcular la velocidad promedio del móvil A entre los 4 y 7 segundos.

   b) Determinar las velocidades (instantáneas) de los móviles A y B en un instante cualquiera.

   c) Calcular la velocidad (instantánea) del móvil B en $t = 0$.

   d) Sabiendo que en un instante ambos móviles se encuentran en el mismo lugar y con la misma velocidad. Indicar el instante en que sucede esto.

6. La concentración en la sangre de un determinado medicamento disminuye con el tiempo según la función

$$C = C(t) = 1{,}5e^{-0{,}25t}$$

   donde t se mide en horas y C en $\frac{gramos}{litros}$. Calcular:

   a) La razón de cambio promedio de la concentración en el intervalo $[1, 2]$. Interpretar el resultado.

   b) La razón de cambio instantánea después de 3 horas. Interpretar el resultado.

7. La ley de Fick establece que el porcentaje de concentración de soluto en el interior de una célula en el tiempo t es
$$f(t) = C(1 - e^{-kt}),$$
donde C es la constante positiva de concentración del soluto que rodea la célula y k es una constante positiva. Suponer que para cierta célula, la concentración de soluto en el interior después de 2 horas es 0.008 % de la concentración de soluto en el exterior. ¿Cómo está cambiando f respecto al tiempo? Interpretar este resultado.

   (R) En el instante t el porcentaje de concentración de soluto en el interior de una célula disminuye a razón de $0{,}004Ce^{0{,}004t}$ por cada unidad de tiempo adicional.

8. Cuando la basura orgánica se vacía en un estanque, el proceso de oxidación que se lleva a cabo reduce el contenido en el estanque; sin embargo, después de cierto tiempo, la naturaleza regresa el contenido de oxígeno a su nivel natural. Supóngase que el porcentaje de contenido de oxígeno t días después de tirar la basura orgánica en el estanque está dado por
$$P = P(t) = 100\left(\frac{t^2 + 10t + 100}{t^2 + 20t + 100}\right)$$
con respecto de su nivel normal. ¿Qué tan rápido cambia el contenido de oxígeno en el estanque 20 días después de vaciar la basura orgánica?

9. El porcentaje de alcohol en el flujo sanguíneo de una persona, t horas después de beber cierta cantidad de whisky está dado por
$$P = P(t) = 0{,}23te^{-0{,}4t}$$
¿Qué tan rápido aumenta el porcentaje de alcohol en el flujo sanguíneo de una persona después de media hora?

10. Un agente antibacteriano agregado a una población de bacterias causa disminución en el tamaño de ésta. Si la población t minutos después de agregado el agente es
$$Q = Q(t) = Q_0 2^{-t/3},$$
donde Q_0 representa la cantidad inicial. Determinar

    a) La razón de cambio de la población al tiempo t, si la población inicial es de 10^6 bacterias.

    b) ¿Después de qué período de tiempo, la población ha disminuido a 10^3 unidades?

11. En una comunidad particular, una cierta epidemia se propaga en tal forma que x meses después de iniciarse el número de personas infectadas es
$$P = P(t) = \frac{30x^2}{(1 + x^2)^2}$$
medido en miles de personas. ¿A qué razón se propaga la epidemia pasadas 2 semanas?

12. Un modelo matemático para estudiar la variación de la población mundial P ha supuesto que la misma está expresada por:
$$P = P(t) = 5e^{0{,}0278t}$$
con P en miles de millones de personas y t en años.

    En este modelo se han considerado constantes la tasa de natalidad (nacimientos por año) y de mortalidad (defunciones por año).

    Tomando $t = 0$ en el año l987:

    a) Bosquejar P como función de t para $t \geq 0$.

    b) Calcular la tasa de variación instantánea de la población en el año l987.

    c) Calcula la población prevista para el año 2005 y la tasa de variación instantánea en ese año.

    d) ¿En qué tiempo se duplicaría la población existente en 1987 y cuando alcanzaría los 15.000 millones?

e) Verificar que en este modelo la tasa instantánea de crecimiento en un instante t se ha supuesto proporcional a la población existente en ese instante, y que la constante de proporcionalidad vale 0.0278.

13. Considerar la función $y = f(x)$ cuyo gráfico es:

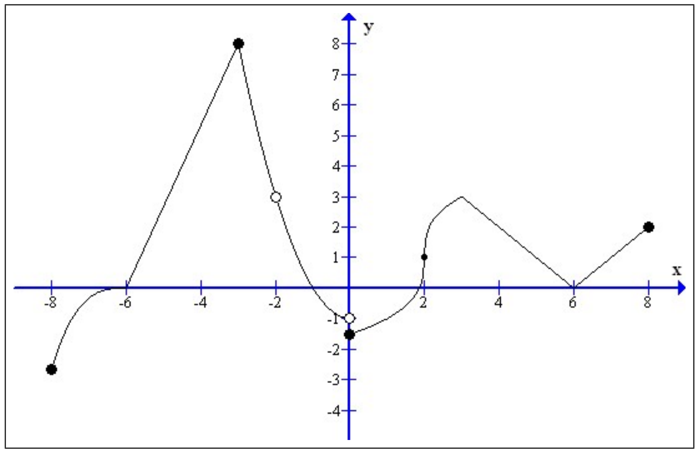

Gráfico de $y = f(x)$

a) Graficar sus rectas tangente en sus puntos de abscisas $x = -5$, $x = 1$, $x = 2$ y $x = 7$.

b) Indicar las abscisas de todos los puntos donde el gráfico de f:

i) No tiene recta tangente.

ii) Su recta tangente no tiene pendiente.

iii) Su tangente tiene pendiente $\frac{8}{3}$.

iv) Su tangente es paralela a la recta $y + 2x = 0$.

v) Su tangente es perpendicular a la recta $y + x = 0$.

Desafío

En el siguiente gráfico la curva es la parábola de ecuación $y = x^2 - 6x$. Determinar una ecuación de la recta tangente que aparece graficada.