U de Talca

- **Definición**. Sea f una función definida en $D \subseteq \mathbb{R}$.

1. f tiene un **máximo relativo** (o local) en $x = c$, si el punto $(c, f(c))$ de la gráfica, es un punto *más alto* que cualquier punto de la gráfica *próximos a* c (por ambos lados).
   Es decir, existe un intervalo abierto I, del dominio de f, que contiene a c, tal que
   $$f(x) \leqslant f(c), \text{ para todo } x \in I.$$
2. f tiene un **máximo absoluto** en $x = c$, si el punto $(c, f(c))$ de la gráfica, es un punto *más alto* que cualquier punto de la gráfica.
   Es decir,
   $$f(x) \leqslant f(c), \text{ para todo } x \in D.$$
3. f tiene un **mínimo relativo** (o local) en $x = d$, si el punto $(d, f(d))$ de la gráfica, es un punto *más bajo* que cualquier punto de la gráfica *próximos a* d (por ambos lados).
   Es decir, existe un intervalo abierto I, del dominio de f, que contiene a d, tal que
   $$f(d) \leqslant f(x), \text{ para todo } x \in I.$$
4. f tiene un **mínimo absoluto** en $x = d$, si el punto $(d, f(d))$ de la gráfica, es un punto *más bajo* que cualquier punto de la gráfica.
   Es decir,
   $$f(d) \leqslant f(x), \text{ para todo } x \in D.$$

- *Actividad*. En los siguientes gráficos, identificar los extremos relativos y absolutos:

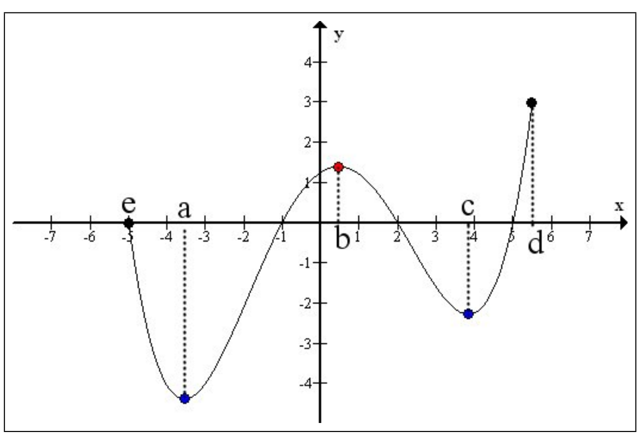


Gráfico 1

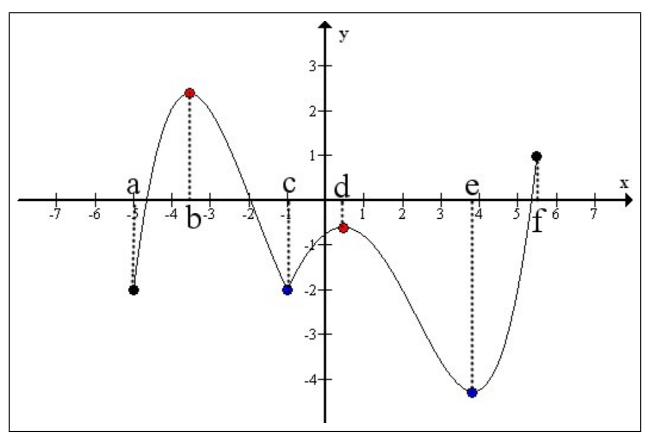


Gráfico 2

- ¿Que condiciones puede cumplir un punto donde una función alcanza un extremo?. Los puntos donde una función puede alcanzar un extremo (candidatos a extremos) reciben el nombre de *puntos críticos de la función*.

U de Talca

Respuesta:

- **Extremos absolutos de una función**.

  Para empezar recordemos el teorema (para funciones continuas):

Toda función **continua** en un intervalo **cerrado** alcanza sus extremos absolutos (mínimo absoluto y máximo absoluto).

- *Regla o procedimiento para determinar los extremos absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado* $[a, b]$:
  - Determinar los puntos críticos de f

    Estos se determinan:
    1. Raíces de la ecuación $f'(x) = 0$
    2. Valores de x para los cuales no existe $f'(x)$, pero si $f(x)$.
  - Evaluar f en cada punto crítico que se **encuentra** en el intervalo $]a, b[$, y calcular $f(a)$ y $f(b)$:
  - El máximo absoluto de f es el valor más grande de los valores encontrados en el paso anterior. El mínimo absoluto de f es el menor de los valores encontrados en el paso anterior.

- *Un ejemplo*: Determinar los extremos absolutos de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ en el intervalo $[-0.5, 2]$.

  En primer lugar observemos que como f es continua en el intervalo propuesto, ella tiene extremos absolutos en este intervalo. Para encontrarlos, sigamos el procedimiento señalado:

  Paso 1 Búsqueda de puntos críticos.

  1. $f'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \text{ o } x = 1.$
  2. Valores de x para los cuales no existe $f'(x)$, pero si $f(x)$. En este caso no hay.

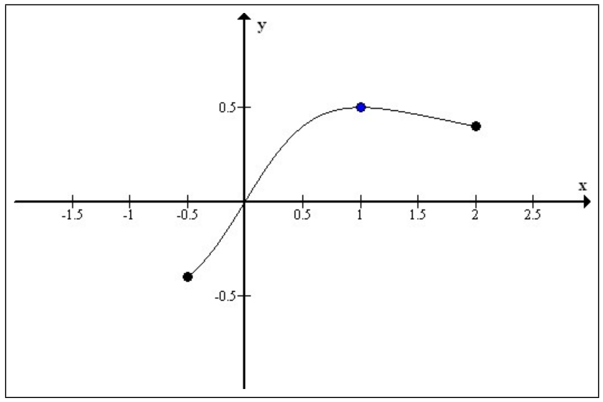
     Luego, el único punto crítico interior al intervalo (dominio de la función) es $x = 1$.

  Paso 2 Evaluar f en cada punto crítico que se **encuentra** en el intervalo $[a, b]$, y calcular $f(a)$ y $f(b)$:

x	$f(x)$	
$-0{,}5$	$-0{,}4$	Pto. terminal
1	0,5	Pto. crítico
2	0,4	Pto. terminal

U de Talca

Respuesta: f tiene máximo absoluto en $x = 1$ igual a 0,5 y mínimo absoluto en $x = -0{,}5$ igual a $-0{,}4$.



Gráfica de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

- Actividad de autoevaluación: Estudiar los extremos absolutos de la función $g(x) = 2x - 3x^{2/3}$ en el intervalo $[-1, 2]$.

Ejercicios

1. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones en los intervalos indicados:

   a) $y = \frac{x^2-4}{x^2+4}$ en $I = [-4, 4]$ b) $y = \sqrt[3]{x}(8 - x)$ en $I = [0, 8]$ c) $y = xe^{-x}$ en $I = [0, 2]$

   d) $y = \frac{\ln x}{x}$ en $I = [1, 3]$ e) $y = x - 2\cos x$ en $I = [-\pi, \pi]$ f) $y = e^{-x} - e^{-2x}$ en $I = [0, 1]$

2. Si a y b son números positivos, encontrar el máximo valor de $f(x) = x^a(1 - x)^b$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

3. Hacer el esbozo del gráfico de una función que satisfaga las condiciones indicadas:

   a) Dominio= $[0, 5]$, máximos relativos en $x = 1$, en $x = 3$ y en $x = 4$, mínimo absoluto en $x = 5$, mínimos relativos en $x = 0$, $x = 2$ y $x =$3.5, y sin máximo absoluto.

   b) Dominio= $[-3, 3]$, y que tenga máximo en un punto en el cual la función no es derivable.

   c) Dominio= $[3, 10]$, y su máximo absoluto se alcance en infinitos puntos.

4. Problemas con enunciado.

   a) Encontrar dos números no negativos cuya suma sea igual a 12 y tales que su producto sea un máximo absoluto.

   b) Encontrar dos números no negativos tales que su suma sea igual a 12 y que la suma de sus cuadrados sea un mínimo absoluto.

U de Talca

c) Un fabricante de cajas de cartón desea elaborar cajas abiertas a partir de trozos rectangulares de cartón con dimensiones de 10cm por 17 cm, cortando cuadrados en las cuatro esquinas y doblando los *lados* hacia arriba. determinar la longitud del lado de los cuadrados que se deben cortar de modo que la caja tenga el mayor volumen posible. Solución: Lado del los cuadrados cortados 2.03cm.

d) Los puntos A y B están en las orillas de un río recto de 3km de ancho y están ubicados en riberas opuestas (uno frente al otro). Un punto C está en la mismo orilla que B pero a 2 kilómetros río abajo. Una compañía telefónica desea tender un cable de A a C donde el costo por kilómetro del cable es de $10000 y el del cable subacuático es de $12500. Determinar el punto P en la misma orilla que B y C de modo que el tendido que va de A a P y luego de P a C, tenga el menor costo posible. Solución: P debe estar en B.

e) Un terreno rectangular se encuentra en la orilla de un rio y se desea delimitarlo de modo que no se utilice cerca a lo largo de la orilla del rio. Si el material para la cerca de los los lados cuesta US$12 por metro colocado y US$18 por metro colocado para el lado paralelo al rio, determinar las dimensiones del terreno de mayor área que se limitar con US$5400 de cerca. Solución: Lado paralelo al rio 150 metros y longitud de cada lado no paralelo al rio, 112.5 metros.

f) Estimar las dimensiones del cilindro circular recto de mayor volumen que se pueda inscribir en un cono circular recto de 5cm de radio y 12cm de altura. Solución: Radio del cilindro, $\frac{10}{3}$cm. Altura del cilindro, 4cm.

g) Una persona tose cuando hay un objeto extraño en su tráquea. La velocidad de la tos depende del tamaño del objeto. Suponga que una persona tiene una tráquea cuyo radio es 20 mm. Si un objeto extraño tiene un radio r (en milímetros), entonces la velocidad V (en milímetros por segundo), necesaria para eliminar el objeto mediante la tos está dada por:

$$V = V(r) = k(20r^2 - r^3); \quad 0 \leqslant r \leqslant 20$$

donde k es una constante positiva. ¿Para que tamaño del objeto se necesita la velocidad máxima con el fin de removerlo?

h) Un artículo en una revista de sociología afirma que si ahora se iniciase un programa específico de servicios de salud, entonces al cabo de t años, N miles de personas adultas recibiría beneficios directos, donde

$$N = \frac{t^3}{3} - 6t^2 + 32t; \quad 0 \leqslant t \leqslant 8$$

¿ Para qué valor de t es máximo el número de beneficiarios?

5. La masa m de agua que a $0°C$ ocupa un volumen de 1 litro, ocupará a $T°C$ un volumen V en litros dado por la función:

$$V = V(T) = 10^{-5}(-6{,}8 \cdot 10^{-3}\, T^3 + 8{,}5 \cdot 10^{-1} T^2 - 6{,}4 \cdot T + 10^5) \quad con \quad 0 \leqslant T \leqslant 10$$

Recordando que la densidad rho de una sustancia homogénea es:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

a) Encontrar la temperatura T para la cual la densidad ρ del agua es máxima.

b) Bosquejar $V(t)$ para $0 \leqslant T \leqslant 10$.

U de Talca