- **Intervalos de crecimiento y de decrecimiento**

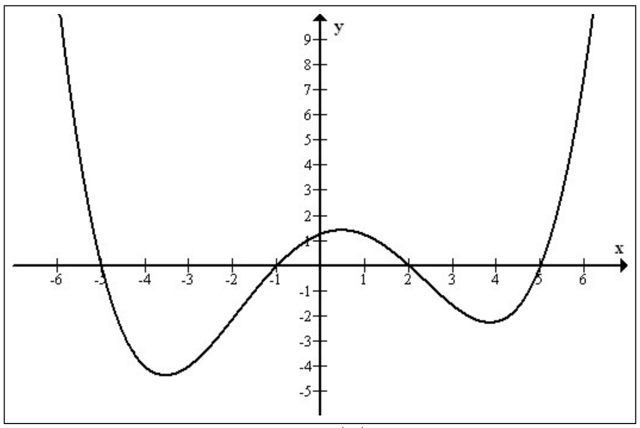
  Definición: Sea $y = f(x)$

  ✓ f es creciente, en sentido estricto ($\uparrow\uparrow$), en $I \subset Dom(f)$, si y solo si,

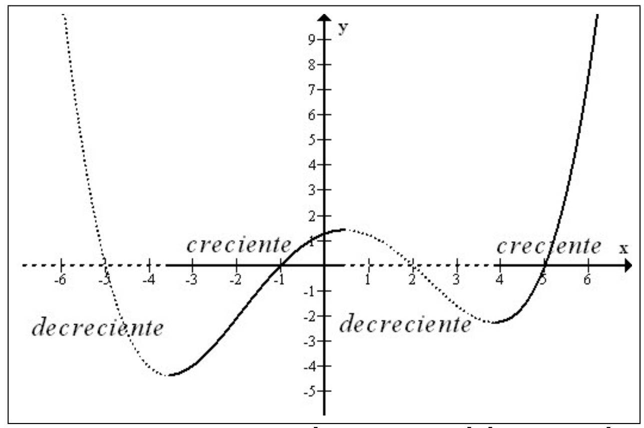
  $$\forall x_1, x_2 \in I,\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

  ✓ f es decreciente, en sentido estricto ($\downarrow\downarrow$), en $I \subset Dom(f)$, si y solo si,

  $$\forall x_1, x_2 \in I,\, x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



$y = f(x)$



Intervalos de crecimiento: $]-3{,}55,\ 0{,}46[$, $]3{,}84,\ +\infty]$
Intervalos de decrecimiento: $]-\infty, -3{,}55[$, $]0{,}46,\ 3{,}84[$

- El estudio del **comportamiento** de una función $f(x)$ (creciente/decreciente) se puede realizar, analizando el signo de $f'(x)$.

  Teorema. Sea $y = f(x)$ función derivable en un intervalo I (o en todo $\mathbb{R}$).

  ✓ Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$ entonces f es **creciente** (en sentido estricto) en I

  ✓ Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$ entonces f es **decreciente** (en sentido estricto) en I

Para determinar los intervalos de crecimiento/decrecimiento se debe resolver las inecuaciones: $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$

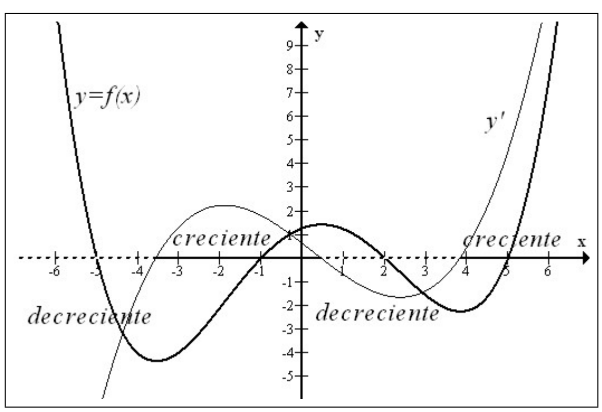


Gráfico de y e y'

- **Ejemplo**: Sea $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$. Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

P1) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$

P2) a) $f'(x) = 0 \Longrightarrow 6(x-1)(x-2) = 0 \Longrightarrow x = 1 \quad o \quad x = 2$

b) No existe x tal que $f'(x)$ no está definida.

Luego, los puntos claves de $f'(x)$ son: 1, 2

P3) Signo de $f'(x)$ en cada sub-intervalo.

	$x < 1$	1	$1 < x < 2$	2	$x > 2$
signo de $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$	$+$		$-$		$+$
Comportamiento de f	f es creciente		f es decreciente		f es creciente

Luego, f es decreciente en ....; f es creciente en ....

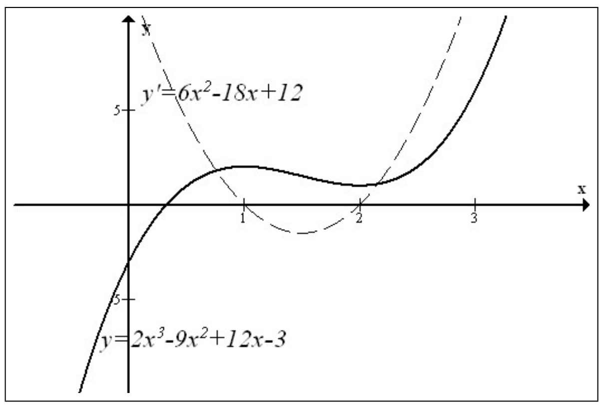


Gráfico de y e y'

- **Actividades**: Estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento de a) $y = x^2 e^x$, b) $y = x \ln x$

- **Método de la 1ra. derivada para calcular extremos relativos de una función.**

Paso 1. Hallar $f'(x)$.

Paso 2. Hallar los **puntos críticos** de f. Los valores críticos, determinan subintervalos en $Dom(f)$.

Paso 3. Estudiar el comportamiento de f en torno a cada valor crítico de f.

Sea $x = c$ un valor crítico de f. Se calcula $f'(x)$ para un valor de x muy cerca por la izquierda de $x = c$, y luego $f'(x)$ para un valor de x muy cerca a la derecha de $x = c$.

- Si el valor de $f'(x)$ cambia de $+$ a $-$, entonces f tiene un **Máximo relativo** en $x = c$ igual a $f(c)$.
- Si el valor de $f'(x)$ cambia de $-$ a $+$, entonces f tiene un **mínimo relativo** en $x = c$ igual a $f(c)$.
- Si el signo de $f'(x)$ no cambia, entonces la función no tiene ni máximo ni mínimo relativo en $x = c$.

- **Ejemplo**. Sea $y = f(x) = x + \dfrac{4}{x+1}$, determinar extremos relativos de f.

Solución:

P1: $f'(x) = 1 - \dfrac{4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$

P2: Valores críticos de f

(*) $f'(x) = 0 \Longrightarrow x = -3$ o $x = 1$.

(*) El denominador de $f'(x)$ se hace cero cuando $x = -1$, de manera que $f'(-1)$ no existe. Se omite $x = -1$ como valor crítico, ya que en -1 la función f no está definida. Ver nota[1]

Así, los valores críticos son -3 y 1.

P3: Los valores críticos dividen el eje real en tres tramos, se analiza el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos (criterio de la primera derivada)

(-4) $x < -3$	-3	(0) $-3 < x < 1$	1	(2) $x > 1$
$f'(x) > 0$		$f'(x) < 0$		$f'(x) > 0$
	$\Downarrow$ Máx rel		$\Downarrow$ min rel	

P4: *Conclusión*: Como la derivada de f cambia de $+$ a $-$ al pasar por -3, entonces en $x = -3$ hay un máximo local, este valor máximo es $f(-3) = -5$.

También, f' cambia de $-$ a $+$ al pasar por $x = 1$, se concluye que en $x = 1$ hay un mínimo local, y este valor mínimo es $f(1) = 3$

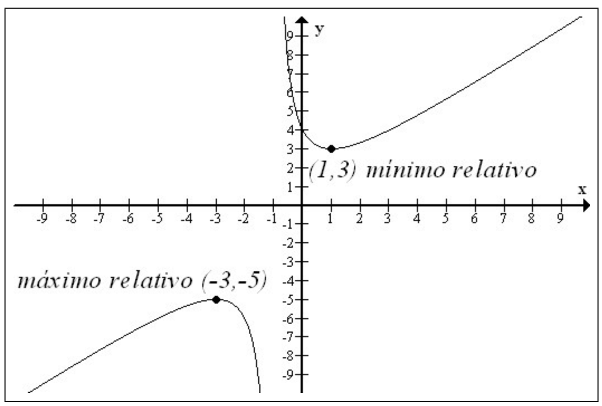


Gráfico de y y sus extremos relativos

- **Autoevaluación**: Estudiar extremos relativos de a) $y = 100 + 8x^3 + x^4$, b) $y = x^{1/3}(x+3)^{2/3}$

- **Actividades finales**

1. Para cada una de las siguientes funciones a) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ b) $y = e^{-\frac{1}{x+1}}$

   a) Estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   b) Determinar sus extremos relativos.

   c) Encontrar los valores de x donde la función crece más rápidamente.

   d) Con la información precedente (a) y (b), hacer un esbozo de su gráfico.

2. Estudiar los extremos relativos para cada una de las siguientes funciones:

   a) $y = 2 + 3x - x^3$ b) $y = x^4 - 6x^2$ c) $y = (x^2-1)^3$

   a) $y = x^5(x+2)^4$ b) $y = 3x^{2/3} - x$ c) $y = xe^{-x}$

   d) $y = x\sqrt{x+3}$ e) $y = \ln(x^4 + 27)$ f) $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$

   g) $y = e^x + 2e^{-x}$ h) $y = \frac{x}{\ln x}$ i) $y = \sin(2x) - x$

[1]Nota: Para estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, se considera $x = -1$.

3. Determinar los valores de a, b, c y d tales que la función definida por $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga extremos relativos en los puntos $(1, 2)$ y $(2, 3)$.

4. El siguiente es el gráfico de **la derivada** de una función $y = g(x)$.

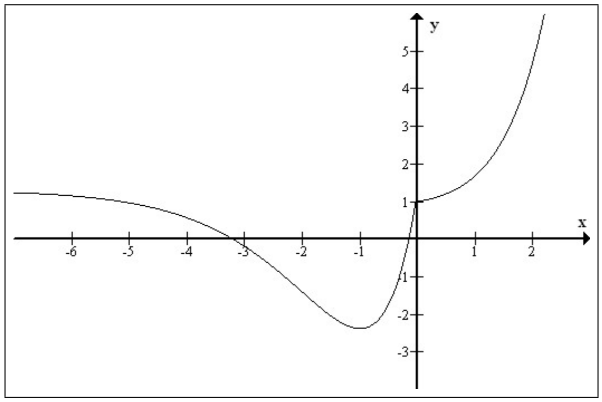


Gráfico de $y' = g'(x)$

Determinar:

a) intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y = g(x)$.
b) extremos relativos de $y = g(x)$.
c) intervalos de crecimiento y decrecimiento de $y' = g'(x)$.
d) extremos relativos de $y' = g'(x)$.

5. Algunos problemas.

a) Determinar las dimensiones de un rectángulo de área $100m^2$ cuyo perímetro sea el menor posible.
b) Encontrar el punto de la recta $y = 4x + 7$ que se encuentra más cerca del origen.
c) Con $1200cm^2$ de material se construye una caja de base cuadrada y abierta en su parte superior. Determinar las dimensiones de la caja de mayor volumen, que se puede construir bajo estas condiciones.
d) Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en un semicirculo de radio r.
e) La reacción a dos drogas como función del tiempo (medido en horas) está dada por:

$$R_1(t) = te^{-t}, \qquad R_2(t) = te^{-2t^2}$$

Debido a las características de cierta enfermedad, se optará por aquella droga que tenga una reacción máxima mayor ¿Qué droga se debe elegir?

f) Un biólogo realizó un estudio sobre los factores que influyen en el crecimiento o decrecimiento de una población de peces presentes en un lago natural. El científico llegó a la conclusión que en verano, producto de la visita humana al lugar, la cantidad de peces presentes en el lago se modela por la función

$$f(t) = 4 + te^{-kt}$$

donde t es el tiempo medido en semanas ($t = 0$ es el primer día de verano) y $f(t)$ es el número de peces en miles.

1) Establecer el modelo en forma precisa (encuentrar el valor de k), si se sabe que después de una semana de comenzado el verano hay 4.600 peces en el lago ¿Cuántos peces hay después de 4 semanas?
2) Para el modelo encontrado en (a) ¿después de cuántas semanas el número de peces en el lago es máximo? ¿Cuándo la cantidad de peces estará aumentado, cuándo disminuyendo?
3) Calcular $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ e interpretar el resultado en el contexto del problema.

g) La fuerza R de reacción del cuerpo humano a una dosis D de cierto medicamento está dada por

$$R = R(D) = D^2 \cdot \left(\frac{k}{2} - \frac{D}{3}\right)$$

donde k es una constante positiva. Demostrar que la máxima reacción se alcanza cuando la dosis es k unidades.

h) Una enzima es una proteína que puede actuar como catalizador para aumentar el ritmo al que se desarrolla una reacción en las células. En una reacción determinada, una enzima se convierte en otra enzima denominada producto. Este último actúa como catalizador para su propia formación. La tasa R a la que se forma el producto (con respecto al tiempo) está dada por la función

$$R = R(p) = kp(L - p),$$

donde L es la cantidad inicial de ambas enzimas, p es la cantidad de la enzima producto y k es una constante positiva. ¿Para qué valor de p será máxima la tasa a la que se forma el producto?

i) Un instituto de salud pública mide la probabilidad que una persona de cierto grupo muera a la edad x y emplea la fórmula

$$P = P(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x},$$

donde λ es un parámetro tal que $0 < \lambda < e$. Hallar el valor máximo de $P(x)$ e interpretar el resultado.