Sesión 1

Integral indefinida

Temas

✓ Antiderivada de una función.

✓ Definición de integral indefinida.

Capacidades

▷ Conocer y comprender el concepto de antiderivada (primitiva) de una función.

▷ Conocer y comprender el concepto y notaciones asociadas de integral indefinida de una función.

▷ Comprender la operación de integración como inversa de la derivación.

1.1 Introducción

Un tema fundamental del Cálculo diferencial es calcular la derivada de una función, que se constituye en una poderosa herramienta para resolver muchos problemas.

Isaac Newton
Inglés (1643-1727)

Sin embargo, hay muchas situaciones que requieren la operación inversa de la derivación para resolverlos. Encontrar una función, conocida su derivada, es un problema fundamental del Cálculo integral, desarrollado en el siglo XVII por Newton, Leibniz y Barrow, entre otros. La operación que se realiza se denomina *integración*, inversa de la derivación, y permite encontrar la *integral* de una función. En esta sesión se revisarán los conceptos básicos relacionados con la integral.

Problema del Cálculo diferencial: Dada una función $F(x)$, calcular $F'(x)$.

Problema del Cálculo integral: Dada una función $f(x)$, encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

Ejemplo 1.1. *Determinar una función $F(x)$ tal que $\dfrac{d}{dx}F(x) = 2x$.*

Solución:
La función $F(x) = x^2$ cumple la condición, ya que $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$.

Otras funciones que también cumplen la condición son:

$$G(x) = x^2 + 5, \qquad H(x) = x^2 - \tfrac{7}{8}, \qquad T(x) = x^2 - 3, \qquad \text{etc.}$$

En general, toda función de la forma $S(x) = x^2 + C$, donde C es cualquier número real, satisface la condición ya que $S'(x) = 2x$.

Nota 1.1. Cada función $F(x)$ tal que $F'(x) = 2x$, se dice que es una *antiderivada* o una *primitiva* de $f(x) = 2x$.

1.2 Definición de antiderivada

Una función $F(x)$ es una *antiderivada* o una *primitiva* de $f(x)$ en un intervalo abierto I, cuando:

$$F'(x) = f(x) \text{ para todo } x \in I$$

Ejemplo 1.2. *Encontrar una antiderivada de cada función:*

a) $f(x) = 3x^2$ b) $g(x) = \cos x$ c) $h(x) = 3x^2 + \cos x$

Solución:

a) Una *antiderivada* de $f(x) = 3x^2$ es $F(x) = x^3$, ya que $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$.

   Otras antiderivadas de $f(x) = 3x^2$ son: $F_1(x) = x^3 + 5$, $F_2(x) = x^3 - \dfrac{7}{8}$, etc.

b) Una *antiderivada* de $g(x) = \cos x$ es $G(x) = \sin x$, ya que $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$.

c) Una *antiderivada* de $h(x) = 3x^2 + \cos x$ es $H(x) = x^3 + \sin x$.

Ejercicio 1.1. *Hallar dos antiderivadas de cada función:*

a) $f(x) = -3$ b) $f(x) = \sin(2x)$ c) $f(x) = x^2 \sin x$

Nota 1.2. En los ejemplos se ha visto que la función antiderivada de una función $f(x)$ no es única. Esto se debe a que la derivada de una constante es cero, propiedad que expresa el siguiente teorema.

Teorema 1.1.

Si $F(x)$ es una *antiderivada* de $f(x)$ en un intervalo abierto I, entonces

$$F(x) + C$$

también es una antiderivada de $f(x)$, donde C es un número real cualquiera.

Nota 1.3. Una pregunta natural es si hay antiderivadas de otra forma. El siguiente teorema describe a todas las antiderivadas de una función.

Teorema 1.2.

Sea $f(x)$ una función. Si $F(x)$ y $G(x)$ son *antidrivadas* de $f(x)$ en un intervalo I, entonces

$$G(x) = F(x) + C$$

donde C es una constante real.

Demostración:

Se define la función H por: $H(x) = G(x) - F(x)$

Luego:
$$\begin{aligned} H'(x) &= G'(x) - F'(x) \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Luego: $H'(x) = 0$, para todo $x \in I$, es decir, $H(x) = C$, donde C es constante.
Por lo tanto $G(x) = F(x) + C$, donde C es constante.

Nota 1.4. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces la *antiderivada más general* de $f(x)$, es $F(x) + C$.

1.3 Definición de Integral indefinida

Dada una función $f(x)$.

> La **integral indefinida** de $f(x)$ es la *función* que representa a todas las antiderivadas de $f(x)$, y se denota:
>
> $$\int f(x)\, dx$$

Nota 1.5. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad C \text{ constante arbitraria}$$

donde:	$\int$	:	*símbolo de la Integral*
	x	:	*variable de integración*
	$f(x)$	:	*función integrando*
	$F(x)$	:	*una primitiva de* $f(x)$
	C	:	*constante de Integración*
	dx	:	*diferencial que especifica la variable de integración*

Nota 1.6. La operación que permite encontrar la *integral indefinida* de una función se denomina *Integración*.

Nota 1.7. Para determinar $\int f(x)\,dx$, se encuentra **una** antiderivada de $f(x)$ y luego se le **suma** la constante de integración, C.

Ejemplo 1.3. *Calcular las siguientes integrales indefinidas:*

a) $\int 3x^2\,dx$ b) $\int \cos x\,dx$ c) $\int (3x^2 + \cos x)\,dx$

Solución:
En el ejemplo 1.2 se obtuvo una antiderivada de cada función. Luego:

a) $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$

b) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

c) $\int (3x^2 + \cos x)\,dx = x^3 + \sin x + C$

Ejemplo 1.4. *Calcular las siguientes integrales:*

a) $\int x^2\,dx$ b) $\int y^2\,dy$ c) $\int u^2\,du$ d) $\int u^2\,dx$

Solución:

a)
- Una antiderivada de $f(x) = x^2$ es la función $F(x) = \frac{1}{3}x^3$
- Luego: $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3 + C$

b) $\displaystyle\int y^2\,dx = \frac{1}{3}y^3 + C$ c) $\displaystyle\int u^2\,du = \frac{1}{3}u^3 + C$ d) $\displaystyle\int u^2\,dx = u^2x + C$

Ejercicio 1.2. *a)* *Calcular* $\dfrac{d}{dx}(x\,e^x)$. *b)* *Determinar* $\displaystyle\int 2\,e^x(x+1)\,dx$.

Nota 1.8. De la definición de integral indefinida se deduce:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= F(x) + C \\
&\Updownarrow \\
F'(x) &= f(x) \\
&\Updownarrow \\
\tfrac{d}{dx}F(x) &= f(x) \\
&\Updownarrow \\
d(F(x)) &= f(x)\,dx \\
&\Updownarrow \\
\int d(F(x)) &= F(x) + C
\end{aligned}$$

Propiedades.

a) *La derivación y la integración son operaciones inversas.*

$$\boxed{\text{(i)} \quad \int \frac{dF(x)}{dx}\,dx = F(x) + C \qquad \text{(ii)} \quad \frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)}$$

Este hecho permite calcular ciertas integrales de manera rápida, utilizando fórmulas básicas de derivación.

b) *Diferencial e integral indefinida.*

a) $\displaystyle\int d(F(x))dx = F(x) + C$ *b)* $\displaystyle d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

c) La integral indefinida $\displaystyle\int f(x)\,dx$ es la solución general de la ecuación diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, o de la ecuación equivalente $dy = f(x)dx$

Ejercicio 1.3. Determinar:

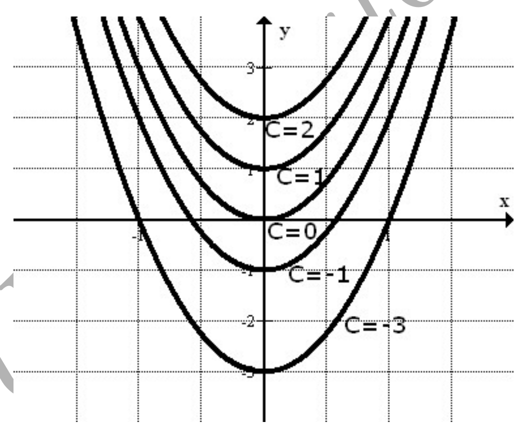
a) $\displaystyle\int (e^{\sqrt{x}})'\,dx$ b) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\int \sqrt{\tan x}\,dx\right)$ c) $\displaystyle\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\int 2\sin(5x)\,dx\right)\right)$

1.4 Significado geométrico

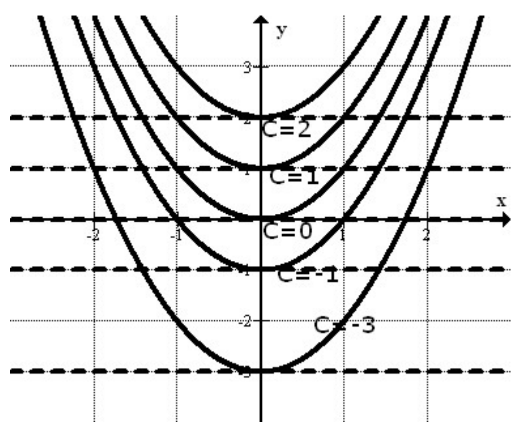
Geométricamente la *integral indefinida* resuelve el problema de encontrar una curva de la cual se conoce su derivada $f(x)$. Dicha curva no es unica. La *integral indefinida* de $f(x)$ entrega todas las funciones cuya derivada es $f(x)$, donde $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, siendo $F(x)$ una antiderivada de $f(x)$.
Si $G(x) = F(x) + C$ es cualquier otra antiderivada de $f(x)$ en un intervalo I, para algún valor de C, su gráfica es una curva *paralela* al gráfico de $y = F(x)$ (trasladada verticalmente).

Esto significa que, para cada valor de x en I, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $F(x)$ en el punto de abscisa x es $f(x)$, y la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $G(x)$ en el punto de abscisa x también es $f(x)$.

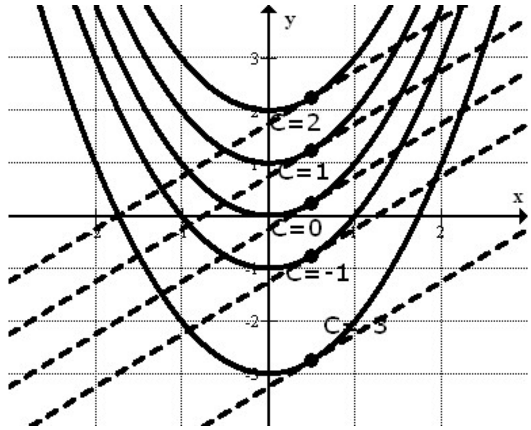
Ejemplo 1.5. *La figura muestra gráficas de antiderivadas de la función $f(x) = 2x$. Estas son de la forma $y = x^2 + C$, ya que x^2 es una antiderivada de $f(x) = 2x$.*



Gráfica de $y = x^2 + C$ para distintos valores de C.



Rectas tangentes a $y = F(x) = x^2 + C$ en $x = 0$. Todas tienen pendiente $0 = f(0)$.



Rectas tangentes a $y = F(x) = x^2 + C$ en $x = 0.5$. Todas tienen pendiente $1 = f(0.5)$.

Ejercicio 1.4. *Graficar tres antiderivadas de la función $f(x) = 3x^2$.*

1.5 Autoevaluación

1) Determinar la veracidad (V) o la falsedad (F) de cada enunciado:

   a) $F(x) = (x+1)^2$ y $G(x) = x^2 + 2x$ son antiderivadas de una misma función.

   b) $\displaystyle\int t \operatorname{sen} t \, dt = \operatorname{sen} t - t \cos t + C$

   c) $\displaystyle\int \frac{u+5}{x} \, du = (u+5) \ln x + C$

2) Hallar tres antiderivadas de $f(x) = 4x^3 + 1$.

3) Calcular $\displaystyle\int \left(\frac{d}{dx} x^2 e^x \right) dx$

4) Determinar la función $f(x)$ tal que $\displaystyle\int 2\, f(x)\, dx = \ln \frac{x-1}{x+1} + C$.

Respuestas:

1) $V, \; V, \; F$.

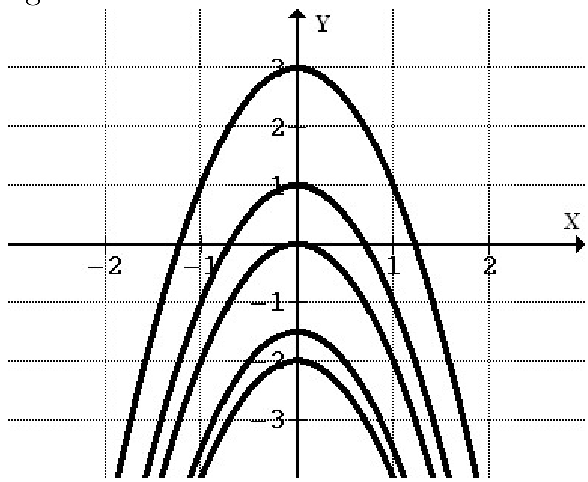
2) Una antiderivada es $x^4 + x$.

3) $x^2 e^x + C$.

4) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

1.6 Desafío

La figura presenta las gráficas de cinco antiderivadas de una función $f(x)$.



1) Determinar $f(x)$. ¿Es única esta función?.

2) Determinar una antiderivada de $f(x)$ que pase por el punto $(1, 3)$.