Sesión 2

Fórmulas de integración

Temas

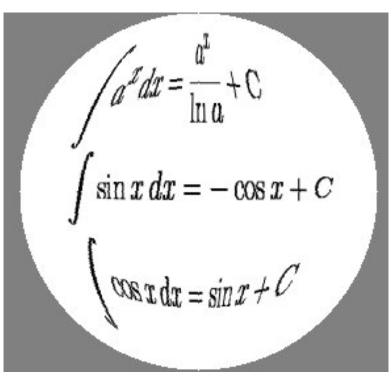
- ✓ Fórmulas básicas de integración.
- ✓ Propiedades elementales de la integral indefinida.

Capacidades

- ▷ Conocer y comprobar fórmulas básicas de integración.
- ▷ Conocer las propiedades elementales de la integración y usarlas en el cálculo de integrales.
- ▷ Calcular integrales indefinidas usando formulario y propiedades elementales de las integrales.

2.1 Introducción

Para la derivación se tienen reglas generales, en cambio para la integración hay métodos que sirven para ciertas clases de funciones, no existiendo un procedimiento sistemático que pueda aplicarse siempre a una función elemental y que garantice una primitiva, incluso en algunos casos puede no haberlo.



En este curso se estudia la integración de aquellas funciones que se dejan integrar con las técnicas más usuales. En esta sesión se revisa las fórmulas de integración de funciones elementales, obtenidas de la derivación aplicando la operación inversa y el uso de una *tabla de fórmulas de integración* para calcular integrales inmediatas. Por ejemplo:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \text{ ya que } \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

2.2 Fórmulas de integración

De la definición de integral indefinida, *toda fórmula de derivación da origen a una fórmula de integración*. A modo de ejemplo, se determina la fórmula de dos integrales indefinidas de funciones elementales.

I. Fórmula de $\int k\,dx$, donde k es una constante.

Solución:

Como $\frac{d}{dx}kx = k$, luego:

$$\boxed{\int k\,dx = k\,x + C}$$

Por ejemplo; $\int 5\,dx = 5x + C$.

II. Fórmula de $\int x^n dx$ para $n \neq -1$.

Solución:

Esta fórmula se obtiene de la fórmula de derivación: $\frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1}$.

Como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{d}{dx}x^{n+1} = x^n$$

Luego, una antiderivada de x^n es la función $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, con $n \neq -1$.

Por lo tanto:

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \neq -1}$$

Nota 2.1. Esta fórmula permite calcular la integral indefinida de cualquier potencia de x, excepto para el caso x^{-1}.

Por ejemplo:

a) $\int x^2 dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + C = \frac{1}{3}x^3 + C$

b) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

c) $\int \frac{1}{x^7}\,dx = \int x^{-7}dx = \frac{1}{-7+1}x^{-7+1} + C = -\frac{1}{6}x^{-6} + C$

El siguiente teorema presenta la lista de fórmulas de integrales indefinidas, que serán usadas en este curso.

Teorema 2.1. *Algunas fórmulas básicas de integración.*

1) $\displaystyle\int k\,dx = k\,x + C, \quad k$ es una constante

2) (a) $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C, \quad n \neq -1$ (b) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$

3) (a) $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0,\, a \neq 1$ (b) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

4) Integrales de las funciones trigonométricas básicas.

a) $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

b) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$

c) $\displaystyle\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + C$

d) $\displaystyle\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

e) $\displaystyle\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

f) $\displaystyle\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + C$

5) Integrales de otras funciones funciones trigonométricas.

a) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

b) $\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

c) $\displaystyle\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$

d) $\displaystyle\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

6) Integrales de $\dfrac{1}{a^2 \pm x^2}$.

a) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \quad a > 0$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C, \quad a>0$

7) Algunas integrales que contienen $\sqrt{a^2 \pm x^2}$.

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln|x+\sqrt{a^2+x^2}| + C = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a>0$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arcsec}\,\frac{x}{a} + C$

e) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right) + C = -\frac{1}{a}\,\mathrm{sech}^{-1}\frac{|x|}{a} + C$

f) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

g) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$

h) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) + C$

Demostración:
Todas las fórmulas se demuestran, verificando que la derivada de la función correspondiente al valor de la integral es, justamente, la función integrando. A modo de ejemplo, se verifica la 7(c):

$$[\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})]' = \frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})'}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2-a^2}+x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 2.1. Cálculo de integrales indefinidas, usando fórmulas de integración:

a) $\displaystyle\int 2^x\,dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$ (Fórmula 3.a)

b) $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x}dx = \int x^{4/3}dx = \frac{3}{7}x^{7/3} + C$ (Fórmula 2.a)

c) $\displaystyle\int \frac{1}{9+x^2}\,dx = \int \frac{1}{3^2+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + C$ (Fórmula 6.a)

Teorema 2.2. *Propiedades elementales de la integral indefinida*

P1. $\displaystyle\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$, para cualquier constante k

P2. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

Ejemplo 2.2. Determinar $\displaystyle\int (2x^3 - 4x + 5)\,dx$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\int (2x^3 - 4x + 5)\,dx &= \int 2x^3\,dx - \int 4x\,dx + \int 5\,dx && \text{(Propiedad P2)}\\
&= 2\int x^3\,dx - 4\int x\,dx + \int 5\,dx && \text{(Propiedad P1)}\\
&= 2\,\frac{x^4}{4} - 4\,\frac{x^2}{2} + 5x + C && \text{(Fórmula 2.a)} \qquad [*]
\end{aligned}$$

Luego:

$$\int (2x^3 - 4x + 5)\,dx = \frac{x^4}{2} - 2x^2 + 5x + C$$

[*] Aunque cada integral requiere una constante de integración, se escribe sólo una constante, que representa la suma algebraica de ellas.

Ejemplo 2.3. Calcular $\displaystyle\int \left(1 + \frac{5}{x} - 3e^x\right)\,dx$.
Solución:

$$\begin{aligned}
\int \left(1 + \frac{5}{x} - 3e^x\right)\,dx &= \int 1\,dx + 5\int \frac{1}{x}\,dx - 3\int e^x\,dx && \text{(Propiedades P1 y P2)}\\
&= x + 5\,\ln x - 3e^x + C && \text{(Fórmulas 1, 2.b y 3.b)}
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.4. Hallar todas las funciones $g(x)$ tales que $g'(x) = 2\sin x + 3\cos x$
Solución:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int (2\sin x + 3\cos x)\,dx\\
&= 2\int \sin x\,dx + 3\int \cos x\,dx\\
&= 2\,(-\cos x) + 3\sin x + C
\end{aligned}$$

Luego: $g(x) = -2\cos x + 3\sin x + C$

Nota 2.2. En los ejemplos previos, la aplicación de fórmulas de una tabla ha sido directa. En otros casos, se requiere *transformar* la función a integrar, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.5. Calcular $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{\sqrt{t}}\,dt.$

Solución:

$$\int \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{\sqrt{t}}\,dt = \int \frac{t-2\sqrt{t}+1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \left(t^{1/2}-2+t^{-1/2}\right)dt = \frac{2}{3}\,t^{3/2}-2t+2t^{1/2}+C$$

Ejemplo 2.6. Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+4}}\,dx.$

Solución:

$$\int \frac{1}{\sqrt{9x^2+4}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{x^2+\frac{4}{9}}}\,dx \overset{P1}{=} \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}} \overset{F7.a}{=} \frac{1}{3}\,\ln\left|3x+\sqrt{9x^2+4}\right|+C$$

Ejercicio 2.1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \frac{(x-1)(\sqrt[3]{x}+2)}{5}\,dx$ b) $\displaystyle\int \left(7\operatorname{sen} t - \frac{2+t^2}{t}\right)dt$ c) $\displaystyle\int \frac{6}{\sqrt{9-3x^2}}\,dx$

2.3 Autoevaluación

1) Calcular $\displaystyle\int \left(t\sqrt{t}-\frac{1}{t}\right)^2 dt.$

2) Calcular $\displaystyle\int \frac{xe^x-5+3x\cos x}{4x}\,dx.$

3) Calcular $\displaystyle\int \frac{10}{\sqrt{5-x^2}}\,dx.$

4) Verificar la fórmula 7(f).

Respuestas: (1) $\frac{3t^5-16t^{5/2}-12}{12t}+C$ (2) $\frac{e^x}{4}-5\,\frac{\ln x}{4}+3\frac{\sin x}{4}+C$ (3) $10\ \operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$
(4) Ver demostración del Teorema 2.1.

2.4 Desafío

Calcular $\displaystyle\int 2\,|x|\,dx$