Sesión 3

Método de cambio de variable

Temas

✓ Método de sustitución o cambio de variable.

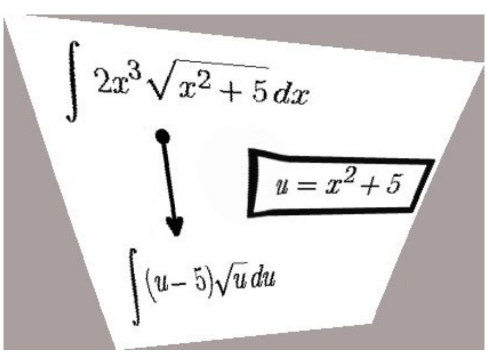
Capacidades

▷ Conocer y comprender el método de cambio de variable.

▷ Calcular integrales indefinidas que se pueden obtener aplicando el método de cambio de variable.

3.1 Introducción

Como se observó anteriormente, para la integración hay diversos métodos que sirven para ciertas clases de funciones.



Uno de ellos es el uso de fórmulas, para calcular integrales inmediatas, trabajado en la sesión anterior. Otros métodos que serán tratados en nuestro curso son: sustitución o cambio de variable, integración por partes, integración por fracciones parciales y algunas integrales trigonométricas.
Todos los métodos de integración tienen por finalidad transformar una integral no inmediata, en otra cuyo cálculo resulte más sencillo.

En esta sesión se revisará el método de sustitución o de cambio de variable.

3.2 Ejemplo ilustrativo

El método se ilustrará con el cálculo de la siguiente integral:

$$\int 3x^2(x^3+1)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

Notar que, esta integral no se puede obtener usando las fórmulas básicas de integración.

Solución.

- Sustituir: $u = x^3 + 1$

  y calcular du:

  $$u = x^3 + 1 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Longrightarrow du = 3x^2\,dx$$

- Aplicar la sustitución para obtener una integral en la variable u:

  $$\int 3x^2(x^3+1)^{\frac{1}{3}}\,dx = \int (\underbrace{x^3+1}_{u})^{\frac{1}{3}}\,\underbrace{3x^2dx}_{du} = \int u^{\frac{1}{3}}\;du$$

- Integrar con respecto a u:

  $$\int u^{\frac{1}{3}}\,du = \frac{3u^{\frac{4}{3}}}{4} + C$$

- Reemplazar u por la expresión x^3+1 (deshacer el cambio de variable):

  $$\int 3x^2(x^3+1)^{\frac{1}{3}}\,dx = \frac{3(x^3+1)^{\frac{4}{3}}}{4} + C$$

Nota 3.1. Para comprobar el resultado precedente, ¿qué se debería hacer?.

Nota 3.2. El método de sustitución o cambio de variable, consiste en transformar una integral en otra más sencilla mediante un cambio de la variable independiente.

Nota 3.3. El método de sustitución se usa para ciertas clases de funciones. En general, se usa para calcular integrales de la forma:

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx$$

y que se extiende a otros casos.

3.3 Justificación del método

El método de sustitución se basa en la regla de derivación de una función compuesta o regla de la cadena.

Teorema 3.1. *Si F es una antiderivada de $f(x)$ entonces:*

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$$

Demostración

Por la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))\, g'(x)$$

Como F es una antiderivada de f:

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = f(g(x))\, g'(x)$$

Luego :

$$d(F(g(x))) = f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

Integrando :

$$\int d(F(g(x))) = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

se obtiene :

$$F(g(x)) + C = \int f(g(x))\, g'(x)\, dx$$

Por lo tanto:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C \qquad (*)$$

Nota 3.4. En la práctica, para calcular la integral indefinida de una función en la variable x (o la variable de integración que sea) se acostumbra realizar el cambio de variable usando la sustitución:

$$u = g(x), \quad \text{de donde } du = g'(x)\, dx$$

Luego, reescribiendo la relación (*) se obtiene:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C$$

En particular:

a) $\displaystyle\int \cos(\underbrace{g(x)}_{u})\ \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \boxed{\int \cos u\ du = \sin u + C} = \sin(g(x)) + C$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\underbrace{g(x)}_{u=g(x)}}\ \underbrace{g'(x)\,dx}_{du} = \boxed{\int \frac{1}{u}\ du = \ln|u| + C} = \ln|g(x)| + C$

Nota 3.5. La aplicación del *método de sustitución* para calcular la integral de una función en x, que se deja resolver con esta técnica, considera los siguientes pasos:

(1) Definir una nueva variable $u = g(x)$, donde $g(x)$ se elige convenientemente.

(2) Calcular du

$$u = g(x) \Longrightarrow du = g'(x)\,dx$$

y luego transformar la integral en x en una integral en la variable u.

(3) Integrar la función en u obtenida en el paso anterior.

(4) Reescribir el resultado obtenido en términos de x, reemplazando u por $g(x)$.

Ejemplo 3.1. *Calcular* $\displaystyle\int 4x\sqrt{x^2-2}\,dx$

Solución:

[Sea $u = x^2 - 2$, entonces $du = 2x\,dx$].
Luego:

$$\begin{aligned}\int 4x\sqrt{x^2-2}\,dx &= \int 2\sqrt{x^2-2}\ 2x\ dx = \int 2\sqrt{u}\,du\\ &= \frac{4\,u^{3/2}}{3} + C\end{aligned}$$

Reemplazando $u = x^2 - 2$ se obtiene:

$$\int 2x\sqrt{x^2-2}\,dx = \frac{4(x^2-2)^{3/2}}{3} + C$$

Ejercicio 3.1. *Calcular* $\displaystyle\int 4x^2\, e^{5-x^3}\,dx.$

Ejemplo 3.2. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx.$

Solución:

$\left[\text{Sea:}\quad u = \ln x, \quad \text{entonces:}\quad du = \dfrac{1}{x}\,dx\right]$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x}\,dx &= \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C\\ &= \frac{(\ln x)^2}{2} + C\end{aligned}$$

Ejemplo 3.3. *Determinar* $\int \sin x\,\cos x\,dx$.

Solución:

[Sea: $u = \sin x$, entonces: $du = \cos x\,dx$]

Luego:

$$\begin{aligned}\int \sin x\,\cos x\,dx &= \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C\\ &= \frac{\sin^2 x}{2} + C\end{aligned}$$

Nota 3.6. La integral precedente también *se deja* calcular usando el cambio de variable $u = \cos x$.

Nota 3.7. Usando la identidad trigonométrica $\sin(2x) = 2\sin x\,\cos x$, se obtiene que $\int \sin x\,\cos x\,dx = \int \frac{\sin(2x)}{2}\,dx$. Realizar el cálculo de la integral usando esta forma equivalente y comprobar que se llega al *mismo* resultado.

Ejemplo 3.4. *Calcular* $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

Solución:

$\left[\text{Sea:} \quad u = \sqrt{x} \quad \text{entonces:} \quad du = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right]$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx &= \int \sin u\;\,2\,du = 2(-\cos u) + C\\ &= -2\cos\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Ejercicio 3.2. *Calcular cada integral indefinida, considerando la sustitución sugerida:*

a) $\displaystyle\int \frac{\cos e^{-2x}}{e^{2x}}\,dx, \quad u = e^{-2x}$

b) $\displaystyle\int \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx, \quad u = 1 + \ln x$

c) $\displaystyle\int \frac{6x^2+2}{\sqrt{x^3+x-1}}\,dx, \quad u = x^3 + x - 1$

d) $\displaystyle\int \frac{e^{-2/x}}{x^2}\,dx, \quad u = -\frac{2}{x}$

Nota 3.8. Una sustitución adecuada es fundamental para simplificar la integral, y en algunos casos, además se requiere despejar x en términos de u.

Ejemplo 3.5. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx$

Solución:

$$\left[\begin{array}{llll} \text{Sea:} & u = 3x+1 & \text{entonces:} & du = 3\,dx \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & x = \dfrac{u-1}{3} & & dx = \dfrac{du}{3} \end{array}\right]$$

luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{3x+1}}\,dx &= \int \frac{\frac{u-1}{3}}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{3} = \frac{1}{9}\int (u^{1/2} - u^{-1/2})\,du \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2} - \frac{u^{1/2}}{1/2}\right) + C \\ &= \frac{2}{9}\left(\frac{(3x+1)^{3/2}}{3} - (3x+1)^{1/2}\right) + C \end{aligned}$$

Ejercicio 3.3. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x+2}}\,dx$.

Nota 3.9. Para calcular ciertas integrales que contienen un trinomio cuadrático se puede usar el método de sustitución, completando previamente el cuadrado de un binomio, como se verá en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3.6. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx$.

Solución:

- Completando cuadrado: $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$.
- Luego:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx$$

- Sustituyendo:

$$[\text{Sea:} \quad u = x+1 \qquad \text{entonces:} \qquad du = dx]$$

- Luego:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2+2}\,dx = \int \frac{1}{u^2+2}\,du = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

Ejemplo 3.7. *Calcular* $\displaystyle\int \frac{2x+1}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx.$

Solución:
Reemplazando $u = 4x-3-x^2$ se obtiene $du = (4-2x)dx$. Luego, con esta sustitución la integral dada no se transforma en una integral inmediata. Se tratará primero algebraicamente.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx &= \int \frac{2x-4+5}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx\\ &= \underbrace{\int \frac{2x-4}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{5}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx}_{(2)}\end{aligned}$$

- La integral (1) se puede calcular usando la sustitución $u = 4x-3-x^2$, de donde $du = (4-2x)dx$, obteniendo:

$$\int \frac{2x-4}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx = \int \frac{-du}{\sqrt{u}}\,du = -2\sqrt{u} + C_1 = -2\sqrt{4x-3-x^2} + C_1$$

- Para calcular la integral (2), se completa cuadrado: $4x-3-x^2 = 1-(x-2)^2$. Luego:

$$\int \frac{5}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx = \int \frac{5}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx$$

Sustituyendo: $u = x-2$ y $du = dx$, se obtiene:

$$\int \frac{5}{\sqrt{1-(x-2)^2}}\,dx = 5\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du + C_2 = 5\arcsin(x-2) + C_2$$

- Luego:

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{4x-3-x^2}}\,dx = -2\sqrt{4x-3-x^2} + 5\arcsin(x-2) + C$$

Ejercicio 3.4. *Probar, usando el método de sustitución que:*

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x^2 + C$$

Sugerencia: sustituir $u = x^2$.

Ejercicio 3.5. *Calcular las siguientes integrales indefinidas:*

a) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x+1}\,dx$ b) $\displaystyle\int \cos^3 x\,\sin x\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{1+\ln x}{(x\,\ln x)^2}\,dx$

d) $\displaystyle\int 2x^3\sqrt{x^2+5}\;dx$ e) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$ f) $\displaystyle\int \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

3.4 Autoevaluación

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1) $\displaystyle\int (1+\sin t)^3\,\cos t\,dt$ 2) $\displaystyle\int \frac{x^3+3x}{x^2+1}\,dx$ 3) $\displaystyle\int \frac{1+(\ln x)^2}{x}\,dx$

4) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{3\sqrt{t}}\,dt$ 5) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$ 6) $\displaystyle\int e^{x+e^x}\,dx$

Respuestas:

1) $\displaystyle\frac{(1+\sin t)^4}{4}+C$ 2) $\displaystyle\frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)+C$ 3) $\displaystyle\frac{(\ln x)^3}{3}+\ln x+C$

4) $\displaystyle\frac{2}{3}\,e^{\sqrt{t}}+C$ 5) $\arcsin(x-1)+C$ 6) $e^{e^x}+C$

3.5 Desafío

Hallar todas la funciones $f(x)$ tal que $f'(x)=\dfrac{e^{2nx}-1}{e^{2nx}+1}$, para $n\neq 0$.