Sesión 4

Método de integración por partes

Temas

✓ Método de integración por partes.

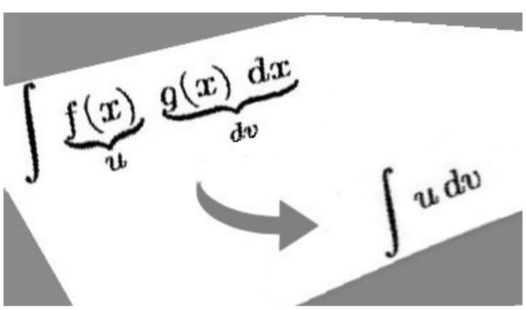
Capacidades

▷ Conocer y comprender el método de integración por partes.

▷ Calcular integrales indefinidas que se pueden obtener aplicando el método de integración por partes.

4.1 Introducción

El formulario de integración no presenta fórmulas para la integral de un producto de funciones. En estricto, no hay un método sistemático para la integral de un producto. En algunos casos se puede usar uno o más métodos, en otros, puede que no exista respuesta.



En esta sesión se estudiará el método de *integración por partes*.

Este método de integración, uno de los más importantes, se deduce de la derivada de un producto de funciones, y permite calcular integrales de ciertas funciones que se pueden descomponer en producto de dos funciones.

4.2 Descripción del método

Para aplicar este método, la función integrando se debe descomponer en un producto de dos funciones.
A continuación se describirá el método y se establecerá cuando se puede aplicar, siguiendo el cálculo de la integral indefinida $\int f(x)\,g(x)\,dx$, donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones diferenciables.

- La función $g(x)$ se puede integrar. Sea $G(x)$ una antiderivada de $g(x)$.
- La fórmula de la derivada de un producto establece que:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,G(x)\right) = f(x)\,G'(x) + G(x)\,f'(x)$$

Como $G'(x) = g(x)$, se obtiene:

$$\frac{d}{dx}\left(f(x)\,G(x)\right) = f(x)\,g(x) + G(x)\,f'(x)$$

- Integrando resulta:

$$f(x)\,G(x) = \underbrace{\int f(x)\,g(x)\,dx}_{\text{integral a calcular}} + \int G(x)\,f'(x)\,dx$$

Luego:

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = f(x)\,G(x) - \int G(x)\,f'(x)\,dx \qquad (*)$$

- Denotando por: $u = f(x)$, $dv = g(x)\,dx$

derivando: $du = f'(x)\,dx$, integrando: $v = \int g(x)\,dx = G(x)$ ↘ antiderivada de $g(x)$

se obtiene la siguiente relación, equivalente a $(*)$:

$$\boxed{\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du}$$

relación conocida con el nombre de *fórmula de integración por partes*.

Nota 4.1 Para calcular la integral indefinida de una función, en x, mediante **integración por partes**, se procede como sigue:

1) Expresar la función integrando como producto de dos funciones: $f(x) \cdot g(x)$.

2) Denotar por u a uno de los factores, por ejemplo: $u = f(x)$, y a la expresión restante $g(x)\,dx$ por dv, es decir:

$$u = f(x) \qquad\qquad dv = g(x)\,dx$$

derivar la primera e integrar la segunda, obteniendo:

$$du = f'(x)\,dx \qquad\qquad \underbrace{v = G(x)}_{\text{una antiderivada de } g(x)}$$

3) Aplicar el método de integración por partes:

$$\int f(x)\,g(x)\,dx = \int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

donde la integral $\displaystyle\int v\,du$ debe resultar *más simple* de calcular.

Nota 4.2 Para la elección de u o de dv no hay una regla general, sólo la práctica es la mejor herramienta.

Ejemplo 4.1 *Calcular* $\displaystyle\int x\,e^x\,dx$ *usando integración por partes.*

Solución.

- Antes de aplicar el método de integración por partes, hay que decidir u y dv. Las posibilidades para este ejemplo son las siguientes:

$$\int \underbrace{e^x}_{u}\,\underbrace{x\,dx}_{dv} \qquad \int \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv} \qquad \int \underbrace{x\,e^x}_{u}\,\underbrace{1\,dx}_{dv} \qquad \int \underbrace{1}_{u}\,\underbrace{x\,e^x\,dx}_{dv}$$

Realizando intentos se decide la segunda opción.

- Aplicando el método de integración por partes:

$$\left[\begin{array}{lcccc} \text{Sean:} & & u = x & dv = e^x dx & \\ & \textit{derivar} & \downarrow & \downarrow & \textit{integrar} \\ & & du = dx & v = e^x & \end{array}\right]$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \int x\,e^x\,dx &= x \cdot e^x - \underbrace{\int e^x\,dx}_{\text{integral inmediata}} \\ &= x \cdot e^x - e^x + C \end{aligned}$$

- Luego: $\displaystyle\int x\, e^x\, dx = x \cdot e^x - e^x + C$

Ejercicio 4.1 *Calcular cada integral, usando integración por partes:*

a) $\displaystyle\int x^2 \ln x\, dx,$ considerar $u = \ln x, \quad dv = x^2\, dx.$

b) $\displaystyle\int x \cos 2x\, dx,$ considerar $u = x, \quad dv = \cos 2x\, dx.$

c) $\displaystyle\int x\sqrt{x+3}\, dx,$ considerar $u = x, \quad dv = \sqrt{x+3}\, dx.$

Esta integral también se puede calcular usando el método de sustitución.

Nota 4.3 El siguiente ejemplo muestra una integral, que se calcula usando integración por partes, donde el factor integrando presenta un único factor.

Ejemplo 4.2 *Calcular* $\displaystyle\int \ln x\ dx.$

Solución.

- Aplicando integración por partes:

$$\left[\begin{array}{lll} \text{Sean:} & u = \ln x & dv = dx \\ & du = \dfrac{1}{x}\, dx & v = x \end{array}\right]$$

se obtiene:

$$\int \ln x\ dx \quad = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int 1\, dx = x \ln x - x + C$$

- Luego: $\displaystyle\int \ln x\ dx = x \ln x - x + C$

Nota 4.4 En algunos casos, se debe aplicar *más de una vez* el método de integración por partes, como se mostrará en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3 *Calcular* $\displaystyle\int x^2\, e^{-x}\, dx.$

Solución.

- Aplicando integración por partes:

$$\left[\begin{array}{lll} \text{Sean:} & u = x^2 & dv = e^{-x}dx \\ & du = 2x\,dx & v = -e^{-x} \end{array}\right]$$

  se obtiene:

$$\int x^2\, e^{-x}\, dx \;\; = -x^2e^{-x} - \int 2x(-e^{-x})\, dx = -x^2e^{-x} + \int 2x\, e^{-x}\, dx$$

- Aplicando nuevamente integración por partes, a la integral $\displaystyle\int 2x\, e^{-x}\, dx$

$$\left[\begin{array}{lll} \text{Sean:} & u = 2x & dv = e^{-x}dx \\ & du = 2\,dx & v = -e^{-x} \end{array}\right]$$

  se obtiene:

$$\int 2x\, e^{-x}\, dx \;\; = -2x\, e^{-x} - \int 2\,(-e^{-x})dx = -2x\, e^{-x} - 2\, e^{-x}$$

- Por lo tanto:

$$\int x^2\, e^{-x}\, dx \;\; = -x^2e^{-x} + (-2x\, e^{-x} - 2\, e^{-x}) + C = -(x^2 + 2x + 2)\, e^{-x} + C$$

Nota 4.5 Observar que en caso precedente, si la integral propuesta hubiese sido $\int x^n e^x dx$, para algún entero positivo n, se debería aplicar sucesivamente n integraciones por parte. Situación que puede resultar excesivamente tediosa. Para estos casos es conveniente proceder de la siguiente manera. Primero verificar, usando integración por partes, que

$$\int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx \tag{4.1}$$

llamada *fórmula de reducción* y luego, aplicando sucesivamente esta fórmula se obtiene el valor de la integral original.

Ejemplo 4.4 *Calcular* $\displaystyle\int x^4 e^x dx$

Solución:

$$\begin{array}{rcll} \displaystyle\int x^4 e^x dx & = & \displaystyle x^4 e^x - 4 \int x^3 e^x dx & \text{Aplicando (4.1) con n=4} \\ & = & \displaystyle x^4 e^x - 4(x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx) & \text{Aplicando (4.1) con n=3} \\ & = & \displaystyle x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12 \int x^2 e^x dx & \text{Aplicando (4.1) con n=2} \\ & = & \displaystyle x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12(x^2 e^x - 2 \int x e^x dx) & \\ & = & \displaystyle x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24 \int x e^x dx & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24(xe^x - \int e^x dx) \quad \text{Aplicando (4.1) con n=1} \\
&= x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24\int e^x dx \\
&= x^4e^x - 4x^3e^x + 12x^2e^x - 24xe^x + 24e^x + C
\end{aligned}
$$

Nota 4.6 En algunos casos al aplicar integración por partes reiteradamente, aparece en el segundo miembro una integral que es *múltiplo* de la integral que se desea calcular, como se presenta en los dos ejemplos siguientes.

Ejemplo 4.5 *Calcular* $\int e^x \cos x\, dx$.

Solución.

- Aplicando integración por partes:

$$
\left[\begin{array}{lll}
\text{Sean:} & u = \cos x & dv = e^x dx \\
 & du = -\sin x\, dx & v = e^x
\end{array}\right]
$$

  Se obtiene:

$$
\begin{aligned}
\int e^x \cos x\, dx &= e^x \cos x - \int (-e^x \sin x)\, dx \\
&= e^x \cos x + \int e^x \sin x\, dx
\end{aligned}
$$

- Aplicando nuevamente integración por partes, a la integral $\int e^x \sin x\, dx$

$$
\left[\begin{array}{lll}
\text{Sean:} & u = \sin x & dv = e^x dx \\
 & du = \cos x\, dx & v = e^x
\end{array}\right]
$$

  se obtiene:

$$
\int e^x \sin x\, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx
$$

- Luego:

$$
\int e^x \cos x\, dx = e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x\, dx\right)
$$

  Pasando la integral del segundo miembro al primero, se obtiene:

$$
2\int e^x \cos x\, dx = e^x(\cos x + \sin x)
$$

- Por lo tanto:

$$
\int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\, e^x(\cos x + \sin x) + C
$$

Ejemplo 4.6 *Calcular* $\int \sec^3 x\, dx$.

Solución.

Aplicando integración por partes:

$$\left[\begin{array}{lll} \text{Sean:} & u = \sec x & dv = \sec^2 x\, dx \\ & du = \sec x\, \tan x\, dx & v = \tan x \end{array}\right]$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\int \sec^3 x\, dx}_{*} &= \sec x\, \tan x - \int \sec x\, \tan^2 x\, dx \\
&= \sec x\, \tan x - \int \sec x\, (\sec^2 x - 1)\, dx \\
&= \sec x\, \tan x - \underbrace{\int \sec^3 x\, dx}_{*} + \int \sec x\, dx \\
2\int \sec^3 x\, dx &= \sec x\, \tan x + \int \sec x\, dx = \sec x\, \tan x + \ln|\sec x + \tan x|
\end{aligned}$$

Luego:

$$\int \sec^3 x\, dx = \frac{1}{2}\sec x\, \tan x + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

Nota 4.7 El método de integración por partes se usa también en casos donde la función integrando contiene funciones trigonométricas inversas, como se muestra a continuación.

Ejercicio 4.2 *Usando integración por partes, haciendo* $u = \arctan x$ *y* $dv = x dx$, *verificar que* $\int x \arctan x\, dx = \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C.$

Ejercicio 4.3 *Usando el método de integración por partes, verificar cada integración:*

a) $\displaystyle\int \frac{x\, e^x}{(x+1)^2}\, dx = \frac{e^x}{x+1} + C$

b) $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx = x\ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$

c) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x}\cdot((\ln x)^2 - 4\ln x + 8) + C$

d) $\displaystyle\int e^{2x}\cos e^x\,dx = e^x \sin e^x + \cos e^x + C$

e) $\displaystyle\int \frac{\ln(\ln t)}{t}\,dt = \ln t\,|\ln(\ln t) - 1| + C$

Ejercicio 4.4 *Calcular cada integral:*

a) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{3x+9}}\,dx$

Sugerencia: usar sustitución antes de aplicar integración por partes.

4.3 Autoevaluación

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int x\sin\frac{x}{2}\,dx$ b) $\displaystyle\int (x^2+x)e^{-x}\,dx$ c) $\displaystyle\int \frac{\ln(2x)}{x^5}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x(1+x\ln x)}{x}\,dx$ e) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^3}dx$ f) $\displaystyle\int e^{2x}\cos(3x)dx$

Hint (d) Separar en dos integrales.

Respuestas:

a) $4\sin\frac{x}{2} - 2x\cos\frac{x}{2} + C$ b) $(x^2+3x+3)e^{-x} + C$

c) $-\dfrac{\ln(2x)}{4x^4} - \dfrac{1}{16x^4} + C$ d) $e^x\ln x + C$

e) $\dfrac{e^{1/x}(x-1)}{x} + C$ f) $\dfrac{1}{13}\,e^{2x}(2\cos\,3x + 3\sin\,3x) + C$

4.4 Desafío

1) Probar que

$$\int \frac{2x^2}{(x^2+a^2)^n}\,dx = -\frac{x}{(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$$

para $n \geq 2$.

2) Calcular $\displaystyle I = \int \frac{2x^2}{(x^2+4)^2}\,dx.$