Sesión 8

Problema del área

Temas

- ✓ Areas conocidas.
- ✓ Area del círculo.
- ✓ Problema del área.

Capacidades

- ▷ Actualizar las figuras geométricas cuya área es conocida.
- ▷ Comprender una deducción del área del círculo.
- ▷ Conocer y comprender el planteamiento del *problema del área*.

8.1 Introducción

Arquímedes
Griego. (272-212 A.C.)

La unidad que iniciamos dice relación con el problema de calcular áreas de figuras planas. En la época de los griegos se planteó este problema y se resolvió en algunos casos particulares. Por ejemplo, Arquímedes calcula el área de un sector parabólico, usando el método de exhaución, el cual consiste en aproximar sucesivamente por *exceso* y/o por *defecto* el área la figura a medir.

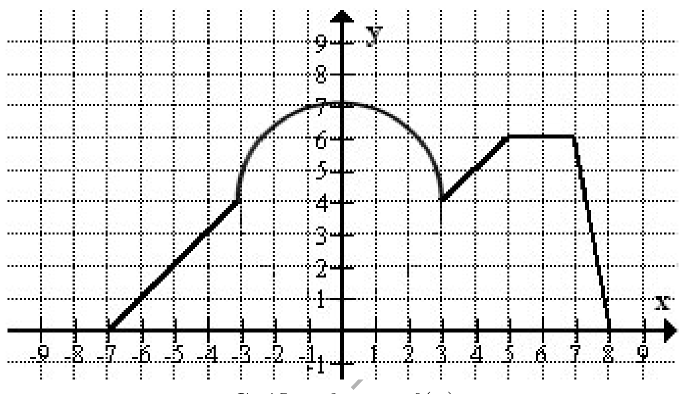
8.2 Areas conocidas

Ejercicio 8.1. *Hacer un listado de algunas figuras planas, para las cuales*

a) *se conozca una fórmula para calcular su área.*

b) ***no*** *se conozca una fórmula para calcular su área.*

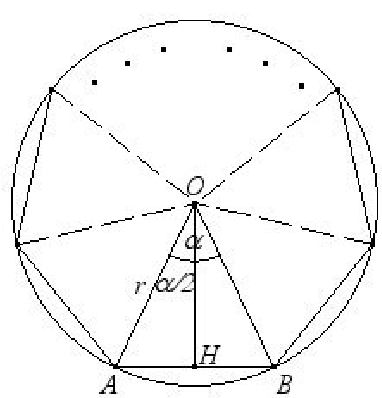
Ejercicio 8.2. *La gráfica de una función* $y = f(x)$ *con dominio* $[-7, 8]$*, viene dada en el siguiente gráfico. Calcular el* área bajo la curva*, es decir el área de la región delimitada por la curva y el eje* X*.*



Gráfica de $y = f(x)$

8.3 Area del círculo

A continuación se verifica, usando el método de exhaución, que el área de un circulo de radio r es πr^2, como todos sabemos, pero que eventualmente nunca hemos verificado. Para ello, sea C_r un circulo de radio r. Inscribamos en este circulo un polígono regular de n lados, P_n, y dividamos este polígono en n triángulos congruentes, tal como se esboza en la siguiente figura:



Sean:

- AB uno de los n lados iguales del polígono inscrito.
- $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ el ángulo central del triángulo isósceles AOB.

Como $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AH}{r}$ y $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{OH}{r}$, se tiene que

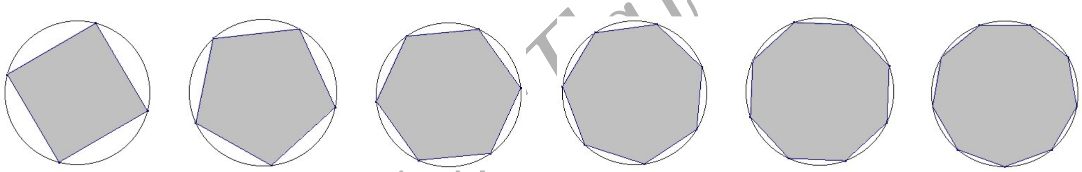
$$AB = 2 \cdot AH = 2r\sin\frac{\alpha}{2} \qquad \text{y} \qquad OH = r\cos\frac{\alpha}{2}$$

Por lo tanto, el área del $\triangle AOB$ viene dada por:

$$\frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2}\left(2r\sin\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(r\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}r^2\sin(\alpha) = \frac{1}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Luego el área del polígono regular inscrito P_n es

$$\frac{n}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$



$n = 4$ $\quad$ $n = 5$ $\quad$ $n = 6$ $\quad$ $n = 7$ $\quad$ $n = 8$ $\quad$ $n = 9$

Ahora bien, es claro que a medida que n crece el área del polígono P_n se va acercando al área del circulo C_r. Es decir

$$\text{area de } C_r = \lim_{n\to+\infty}(\text{area de } P_n)$$

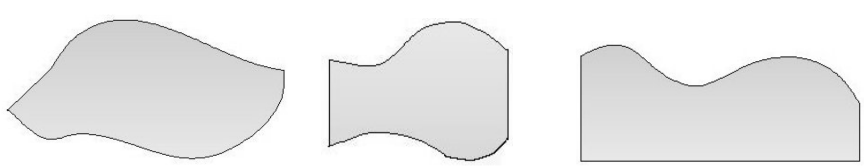
y como

$$\lim_{n\to+\infty}(\text{area de } P_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}r^2\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2,$$

se ha comprobado que el área de un círculo radio r es, efectivamente, πr^2.

8.4 Problema del área

El problema que motiva esta unidad es calcular el área de regiones más generales, por ejemplo, regiones del tipo:

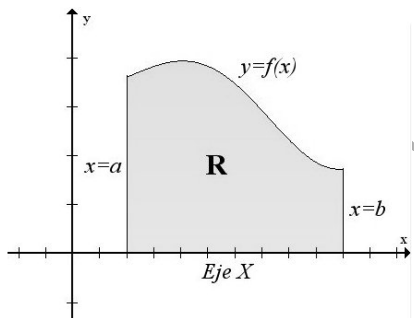


El problema del área, en su versión más simple, consiste en

dada una función continua y positiva $y = f(x)$ definida en un intervalo cerrado $[a, b]$, calcular el área de la región del plano delimitada por

- *Arriba: El gráfico de $y = f(x)$*
- *Abajo: Eje X $(y = 0)$*
- *Izquierda: La recta $x = a$*
- *Derecha: La recta $x = b$*

tal como se indica en la siguiente figura:



8.5 Autoevaluación

Usando el método de exhaución verificar que el perímetro de una circunferencia de radio r, es $2\pi r$.

8.6 Desafío

Encontrar, al menos un valor aproximado, del área de la región R ubicada en el primer cuadrante, delimitada por la gráfica de $y = x^2$ y la recta $x = 2$.

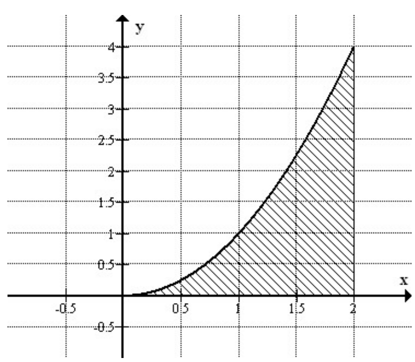


Gráfico de la región R