Sesión 9

Introducción Integral definida (o Integral de Riemann)

Temas

- ✓ Introducción.
- ✓ Solución matemática al problema del área.
- ✓ Sumas de Riemann.

Capacidades

- ▷ Conocer la solución matemática al problema del área.
- ▷ Aplicar sumas de Riemann para calcular aproximadamente áreas bajo una curva.

9.1 Introducción

B. Riemann
Alemán. (1826 - 1866).

En esta sesión se revisa la forma de resolver matemáticamente el problema del área, comentado en la sesión precedente. Tal como veremos a continuación, el método que se usa es, esencialmente, el método de exhaución de Arquímedes. El valor definido, en honor al matemático que formalizó finalmente este concepto, recibe el nombre de Integral de *Riemann* (alemán, 1826-1866). Otros matemáticos que aportaron a esta teoría fueron: Barrow, Newton y Leibniz.

9.2 Solución matemática al problema del área

Para ilustrar la solución matemática del *problema del área*, se trabajará con la función $y = f(x) = x^2 + 2$ en el intervalo $[1, 5]$.

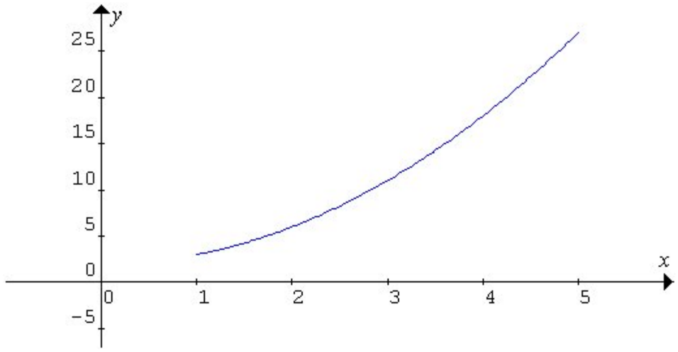
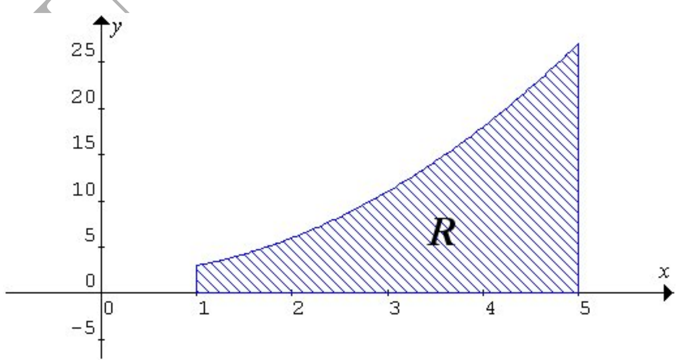


Gráfico de $y = f(x) = x^2 + 2$ *en* $[1, 5]$

El problema que se quiere resolver es: Determinar el área de la región R del plano delimitada por:

- **Arriba**: Gráfico de la función $y = f(x) = x^2 + 2$.
- **Abajo**: Eje X.
- **Izquierda**: La recta $x = 1$.
- **Derecha**: La recta $x = 5$

Es decir, el área que se desea calcular, es la que se encuentra achurada en el siguiente gráfico:



Región R *cuya área se desea calcular*

Nota 9.1. Como veremos más adelante el valor exacto del área buscada es $\frac{148}{3} \approx 49.3333$

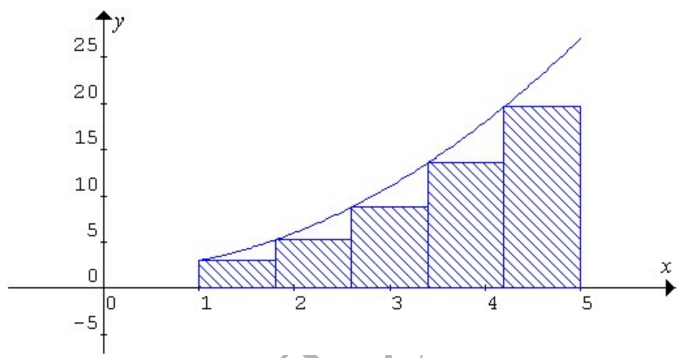
Para, inicialmente, aproximar el área buscada de la región R, dividamos el intervalo $[1, 5]$ en 5 subintervalos* de igual longitud, cada uno tendrá una longitud igual a

* Como es de suponer, se podría haber dividido, tal como se verá más adelante, en otro número de subintervalos.

$\Delta x = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5} \approx 0.8$, elijamos un punto x_i cualquiera en cada subintervalo (en este caso tomaremos el extremo izquierdo en cada subintervalo) y formemos la siguiente suma:

$$\sum_{1}^{5} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_5)\Delta x \approx 40.16 \text{ (!VERIFICARLO!)}$$

suma, que recibe el nombre de **Suma de Riemann**, y que corresponde a las sumas de las áreas de los 5 rectángulos que se muestran en la siguiente figura:

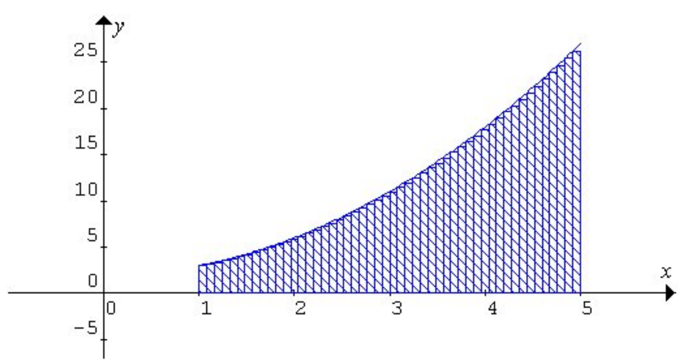


Suma de Riemann con $n = 5$

Con el fin de mejorar esta aproximación, procedamos a incrementar el número de subintervalos en que se divide el intervalo $[1, 5]$. Si se eligen, por ejemplo 50 subintervalos, cada uno tendrá una longitud igual a $\Delta x = \frac{5-1}{50} = \frac{4}{50} \approx 0.08$. En este caso, la suma de Riemann será:

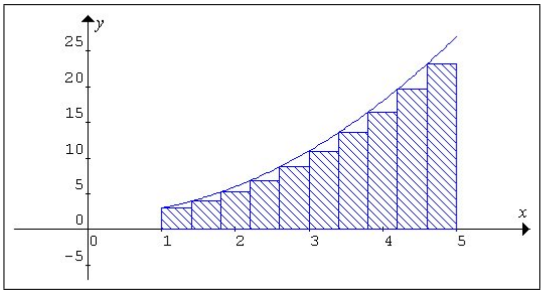
$$\sum_{i=1}^{50} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_{50})\Delta x \approx 46.96$$

valor, que claramente, se encuentra *más cercano* al valor correcto, que es de 49.333. Gráficamente, esta situación se visualiza a continuación:

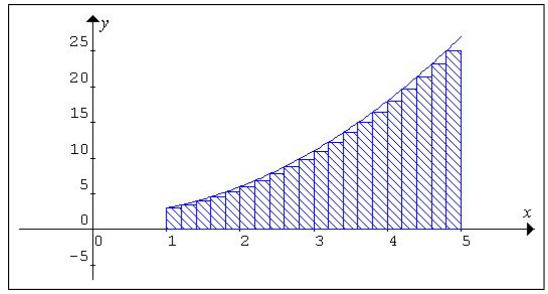


Suma de Riemann con $n = 50$

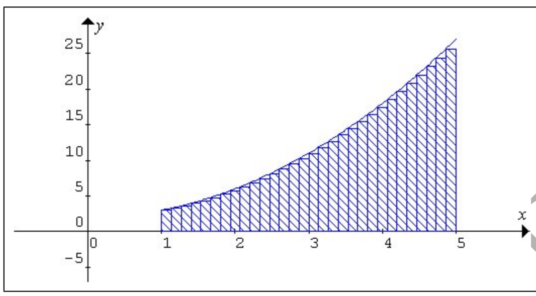
A continuación, se muestran los gráficos de algunas sumas de Riemann y una tabla en la cual se indican el número de subintervalos considerados, el valor aproximado de la respectiva suma de Riemann y una aproximación del valor exacto del área bajo la curva:



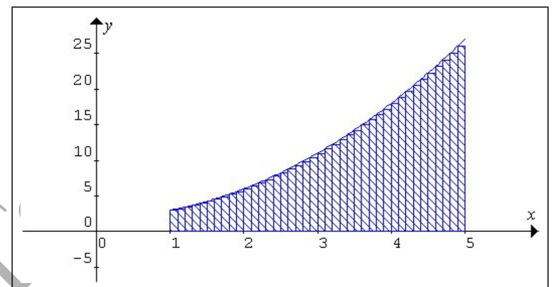
Suma de Riemann con $n = 10$



Suma de Riemann con $n = 20$



Suma de Riemann con $n = 30$



Suma de Riemann con $n = 40$

Subintervalos	Suma de Riemann	Valor exacto
5	40.16	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
10	44.64	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
20	46.96	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
30	47.7452	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$

Subintervalos	Suma de Riemann	Valor exacto
40	48.14	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
50	48.3776	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
100	48.8544	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
1000	49.28534	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
10000	49.38853	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
100000	49.332853	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$
1000000	49.33328	$\frac{148}{3} \approx 49.333333\ldots$

Por lo tanto, para encontrar por medio de sumas de Riemann, el área bajo la curva se tendría que calcular:

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

De hecho, matemáticamente, el área bajo una curva se define de esta manera, tal como se plantea en la siguiente definición:

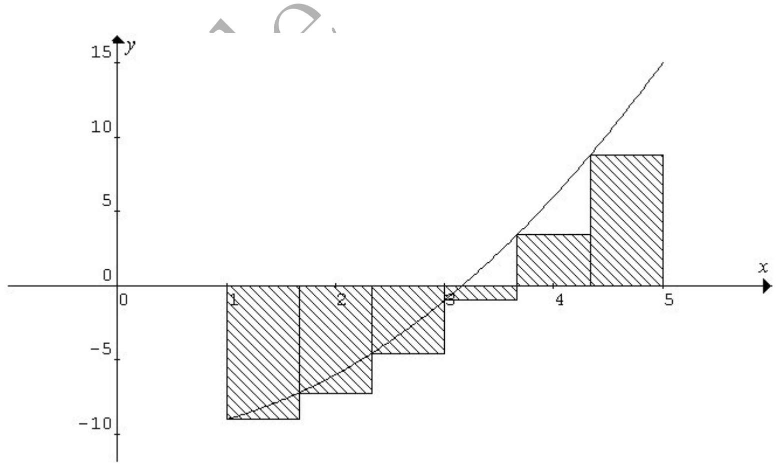
9.3 Definición de área bajo una curva

Si $y = f(x)$ es continua y definida positiva en el intervalo $[a, b]$, entonces el área de la región R, delimitada por la gráfica de la función, las recta $x = a$, $x = b$ y el eje X, usando las notaciones precedentes, se define por:

$$\boxed{Area(R) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

Este límite, que en general se puede calcular para cualquier función continua, se llama **Integral definida** o **Integral de Riemann** de $y = f(x)$ entre a y b.

Nota 9.2. Una suma de Riemann aproxima el área bajo una curva solo en el caso que la función sea no negativa en dicho intervalo, es decir, cuando $f(x) \geqslant 0$. Cuando esta condición no se cumple, el valor de la suma de Riemann no corresponde a una área en particular. Por ejemplo, en el siguiente dibujo, aparece el gráfico de la función $y = f(x) = x^2 - 10$. Esta función, en el intervalo $[1, 5]$, no cumple la condición comentada. Como se puede constatar, en este caso, los términos $f(x_i)\Delta x$ para los x_i que son menores de $\sqrt{10} \approx 3.162$ son negativos.



Suma de Riemann con términos negativos

Ejemplo 9.1. *Usado el método de las sumas de Riemann,*

1) *Determinar aproximadamente el área bajo la curva $y = f(x) = 1 + x$ entre 0 y 2, dividiendo el intervalo $[0, 2]$ en 2 y 3 subintervalos y eligiendo el punto del medio.*

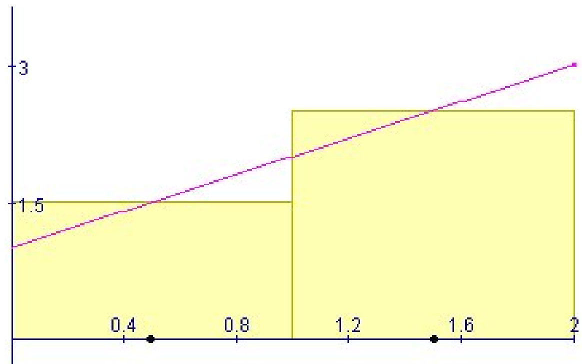
2) *Los valores encontrados, ¿qué tan bien aproximan el área buscada?*

Solución:

1) • Para $n = 2$, se tiene que $\Delta x = \frac{2-0}{2} = 1$. Luego se tienen 2 subintervalos: $[0, 1]$ y $[1, 2]$. Los puntos medios son: $x_1 = 0.5$ y $x_2 = 1.5$. Por lo tanto, la suma de Riemann es este caso es:

$$\sum_{i=1}^{2} f(x_i)\Delta x = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x = f(0.5) \cdot 1 + f(1.5) \cdot 1 = \tfrac{3}{2} + \tfrac{5}{2} = 4$$

Luego, el área buscada es, aproximadamente, 4 (unidades de longitud)^2

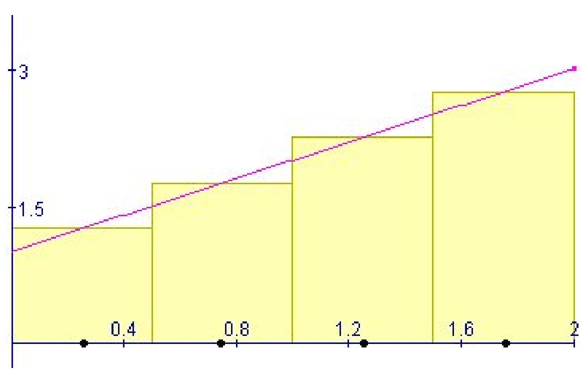


Suma de Riemann con $n = 2$

• Para $n = 4$, se tiene que $\Delta x = \frac{2-0}{4} = 0.5$. Luego se tienen 4 subintervalos: $[0, 0.5]$, $[0.5, 1]$, $[1, 1.5]$ y $[1.5, 2]$. Los puntos medios son: $x_1 = 0.25$, $x_2 = 0.75$, $x_3 = 1.25$ y $x_4 = 1.75$. Por lo tanto, la suma de Riemann en este caso es:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x &= f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x \\ &= f(0.25) \cdot 0.5 + f(0.75) \cdot 0.5 + f(1.25) \cdot 0.5 + f(1.75) \cdot 0.5 \\ &= 4\end{aligned}$$

Luego, el área buscada es, aproximadamente, 4 (unidades de longitud)^2



Suma de Riemann con $n = 4$

2) En esta situación, *casualmente*, los valores entregados por estas sumas de Riemann particulares, entregan el valor exacto de área calculada. ¿Por qué?.

9.4 Autoevaluación

Usando el método de las sumas de Riemann, calcular aproximadamente el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre 1 y 5, tomando $n = 6$ y eligiendo en cada subintervalo el punto de la derecha.

Respuesta: 7.18877245 (unidades de longitud)^2.

9.5 Desafío

A continuación se entrega el gráfico de $y = f(x) = 1 - x^2$, entre 0 y 2. Calcular aproximadamente, usando sumas de Riemann, el área de la región achurada R.

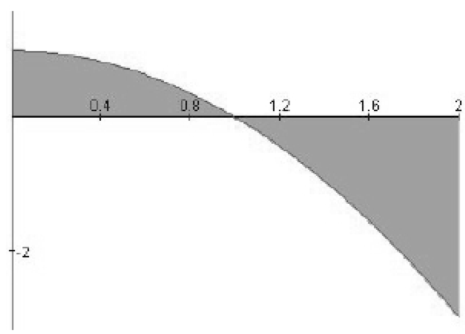


Gráfico de la región R