Sesión 10

Integral definida (o Integral de Riemann)

Temas

✓ Definición de Integral definida.

✓ Propiedades de la integral definida.

✓ Cálculo de integrales definidas.

Capacidades

▷ Conocer y comprender la definición de integral definida.

▷ Conocer las principales propiedades de la integral definida.

▷ Calcular, usando la definición, integrales definidas de funciones simples.

10.1 Introducción

G. Leibniz
Alemán. (1646-1716)

En la sesión precedente se hizo una introducción al concepto de integral definida, junto al calculo aproximado de integrales definidas, a través del calculo de sumas de Riemann particulares. En esta sesión se revisa con más detalle la definición de integral definida, junto a sus principales propiedades y se calculan exactamente integrales definidas de funciones sencillas, usando la definición correspondiente.

10.2 Definición de integral definida

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a, b]$. Dividamos este intervalo en n subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Elijamos un punto x_i en cada uno de los n subintervalos. Se llama integral de Riemann o integral definida de $y = f(x)$ en $[a, b]$, al siguiente límite, cuando existe,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

el que se denota por

$$\int_a^b f(x)dx$$

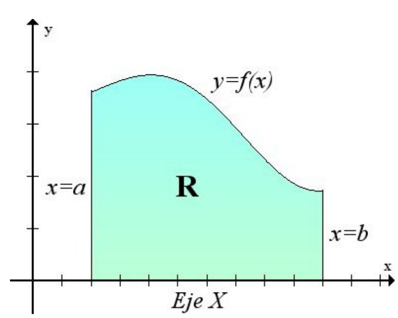
es decir:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x}$$

Observación: La notación de integral definida, $\int_a^b f(x)dx$, se lee "*integral definida entre a y b de la función f.*"

Nota 10.1. *Recordando la definición de área bajo una curva, revisada en la sesión precedente, se tiene que si $y = f(x)$ es una función continua y no negativa en $[a, b]$. El área, A, de la región R del plano ubicada bajo la curva C, gráfico de $y = f(x)$, sobre el eje X y entre las rectas $x = a$ y $x = b$, viene dada por*

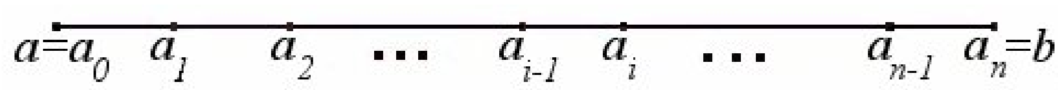
$$\boxed{A = Area(R) = \int_a^b f(x)dx}$$



10.3 Pasos para calcular, usando la definición, una integral definida

De acuerdo a la defición precedente, para calcular la integral de Riemann de una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $[a, b]$, se debe proceder de la siguiente manera:

Paso 1: Partición del intervalo. *Dividir el intervalo dado en n subintervalos, luego cada uno de ellos tendrá longitud igual a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:*



Partición del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos

En donde los puntos que delimitan los n subintervalos son:

$$\begin{array}{rcl}
a_0 & = & a \\
a_1 & = & a + \Delta x \\
a_2 & = & a + 2 \cdot \Delta x \\
a_3 & = & a + 3 \cdot \Delta x \\
 & \vdots & \\
a_{i-1} & = & a + (i-1) \cdot \Delta x \\
a_i & = & a + i \cdot \Delta x \\
 & \vdots & \\
a_{n-1} & = & a + (n-1) \cdot \Delta x \\
a_n & = & a + n \cdot \Delta x = b
\end{array}$$

Paso 2: Elección de puntos. *En cada uno de los n subintervalos se elige un punto arbitrario:*

x_1 *en el primer subintervalo, es decir* $x_1 \in [a_0, a_1]$

x_2 *en segundo subintervalo, es decir* $x_2 \in [a_1, a_2]$

$\vdots$

x_i *en i-ésimo subintervalo, es decir* $x_i \in [a_{i-1}, a_i]$,

$\vdots$

x_n *en n-ésimo subintervalo, es decir* $x_n \in [a_{n-1}, a_n]$,

Para simplificar los cálculos que siguen, normalmente en cada subintervalo se elige el punto de la izquierda, o el punto de la derecha o el punto del medio.

En el primer caso (punto de la izquierda), $x_i = a_{i-1} = a + (i-1) \cdot \Delta x$*,*

en el segundo caso (punto de la derecha), $x_i = a_i = a + i \cdot \Delta x$*,*

y en el último caso, (punto del medio), $x_i = \dfrac{a_{i-1} + a_i}{2} = a + \dfrac{2i-1}{2} \cdot \Delta x$

Paso 3: Formar y simplificar la suma de Riemann. *A continuación se construye la suma de Riemann correspondiente:*

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

en donde:

- $*$ x_i *corresponden a los puntos elegidos en cada uno de los* n *subintervalos.*
- $*$ f *es la función a la cual se le está calculando su integral de Riemann.*
- $*$ $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

Paso 4: Calcular el límite de la suma de Riemann. *Finalmente, a la suma de Riemann encontrada y simplificada en el paso 3, se le calcula el límite cuando* $n \to \infty$*, es decir se calcula*

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

y el valor de este límite es, por definición, el valor de la integral de Riemann de f *en el intervalo* $[a, b]$*:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Ejemplo 10.1. *Calcular, usando la definición correspondiente:* $\displaystyle\int_1^4 x^2\, dx$

Solución*: En este caso* $f(x) = x^2$ *y* $[a, b] = [1, 4]$.

Paso 1: Partición del intervalo. *Dividir el intervalo* $[1, 4]$ *en* n *subintervalos, luego cada uno de ellos tendrá longitud igual a* $\Delta x = \frac{4-1}{n} = \frac{3}{n}$.

Los puntos que delimitan los n *subintervalos son:*

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1\\
a_1 &= 1+\Delta x\\
a_2 &= 1+2\cdot\Delta x\\
a_3 &= 1+3\cdot\Delta x\\
&\vdots\\
a_{i-1} &= 1+(i-1)\cdot\Delta x\\
a_i &= 1+i\cdot\Delta x\\
&\vdots\\
a_{n-1} &= 1+(n-1)\cdot\Delta x\\
a_n &= 1+n\cdot\Delta x = 4
\end{aligned}$$

Paso 2: Elección de puntos. *En cada uno de los* n *subintervalos se elige un punto arbitrario. Eligiendo el punto de la derecha en cada subintervalo, se tiene:*

$$x_i = a_i = a + i\cdot\Delta x$$

Paso 3: Formar y simplificar la suma de Riemann. *A continuación se construye la suma de Riemann correspondiente:*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \sum_{i=1}^{n} f(1+i\Delta x)\Delta x\\
&= \sum_{i=1}^{n}(1+i\Delta x)^2\Delta x\\
&= \sum_{i=1}^{n}(1+2i(\Delta x)+i^2(\Delta x)^2)\Delta x\\
&= \Delta x\cdot\sum_{i=1}^{n}(1+2i(\Delta x)+i^2(\Delta x)^2)\\
&= \Delta x\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}2i\Delta x+\sum_{i=1}^{n}i^2(\Delta x)^2\right)\\
&= \Delta x\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}1+2\Delta x\sum_{i=1}^{n}i+(\Delta x)^2\sum_{i=1}^{n}i^2\right)\\
&= \Delta x\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}1+2\Delta x\sum_{i=1}^{n}i+(\Delta x)^2\sum_{i=1}^{n}i^2\right)
\end{aligned}$$

Usando las fórmulas correspondientes de sumatorias (ver formulario de sumatorias).

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \Delta x\cdot\left(n+2\Delta x\frac{n(n+1)}{2}+(\Delta x)^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

Como $\Delta x = \frac{3}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \frac{3}{n} \cdot \left(n + 2 \cdot \frac{3}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} + \left(\frac{3}{n}\right)^2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

Simplificando,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= 3 + 9\frac{n+1}{n} + \frac{9}{2} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\ &= 3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Paso 4: Calcular el límite de la suma de Riemann. *Finalmente, a la suma de Riemann encontrada y simplificada en el paso 3, se le calcula el límite cuando* $n \to \infty$, *es decir se calcula*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x &= \lim_{n\to+\infty} \left[3 + 9\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= 21 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int_1^4 x^2\, dx = 21$$

10.4 Definición de dos integrales definidas especiales

- *Si* f *está definida en* $x = a$, *entonces se define:*

$$\boxed{\int_a^a f(x)dx = 0}$$

- *Si* f *es continua en* $[a, b]$, $a < b$, *entonces se define:*

$$\boxed{\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx}$$

Teorema 10.1. *Algunas propiedades básicas de la integral definida*

1) Si f *es continua en* $[a, b]$ *y* k *es una constante, entonces*

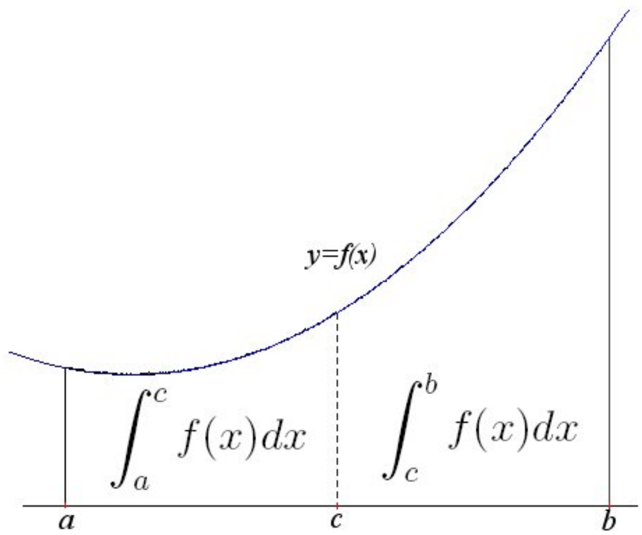
$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

2) Si f y g son continuas en $[a,b]$, entonces:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

3) Si f es continua en $[a,b]$ y c es un punto de este intervalo, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \tag{10.1}$$



Interpretación de (10.1) para $f \geqslant 0$.

4) Si f es continua en $[a,b]$ y $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$.

5) Si f y g son continuas en $[a,b]$ y $f(x) \leqslant g(x)$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

6) ***Teorema del valor medio para integrales****.*

Si f es continua en $[a,b]$, entonces existe un $\alpha \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(\alpha)(b-a).$$

Demostración (Teorema del valor medio para integrales)*.*

Como f es continua en $I=[a,b]$, existen reales m y M tal que

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \tag{10.2}$$

para todo $x \in [a,b]$. Aplicando Teorema 10.1.4.b a (10.2), se tiene

$$\int_a^b m dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b M dx \tag{10.3}$$

o sea,

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a) \tag{10.4}$$

de donde,

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leqslant M \tag{10.5}$$

Ahora, de (10.5) y por el Teorema del valor medio para funciones continuas, existe un $\alpha \in [a,b]$, tal que

$$f(\alpha) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

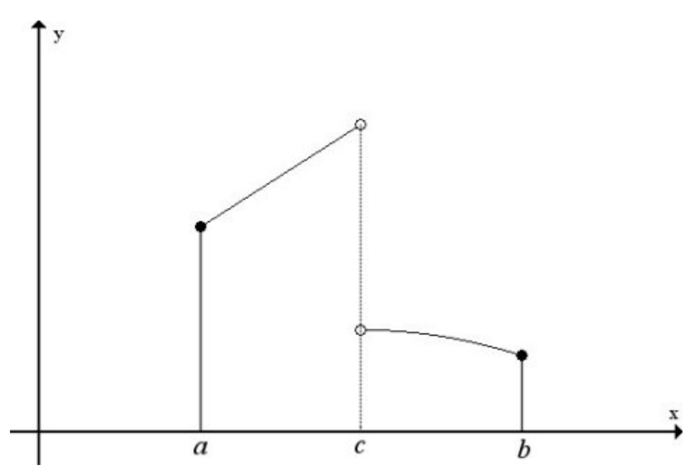
de donde se obtiene el resultado buscado. ∎

Nota 10.2. En el paso (10.4) se usa que $\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

10.5 Definición de integral definida para funciones discontinuas.

Sea $y = f(x)$ una función continua en $[a,b]$, excepto en un punto c con $a < c < b$, tal que existen (finitos), $\lim_{x\to c^-} f(x)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x)$. En este caso, la integral definida de f en el intervalo $[a,b]$, viene definida por:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$



Integral definida para una función discontinua

10.6 Autoevaluación

1) *Usando la definición correspondiente, calcular* $\displaystyle\int_0^5 (1 - x^3)\, dx$

2) *Usando la definición correspondiente, calcular*

   a) $\displaystyle\int_a^b x\, dx$

   b) $\displaystyle\int_a^b x^2\, dx$

   c) *Usando los resultados obtenidos, encontrar el valor de* $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx$*, donde*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ x^2 & \text{si } 2 < x \leqslant 3 \end{cases}$$

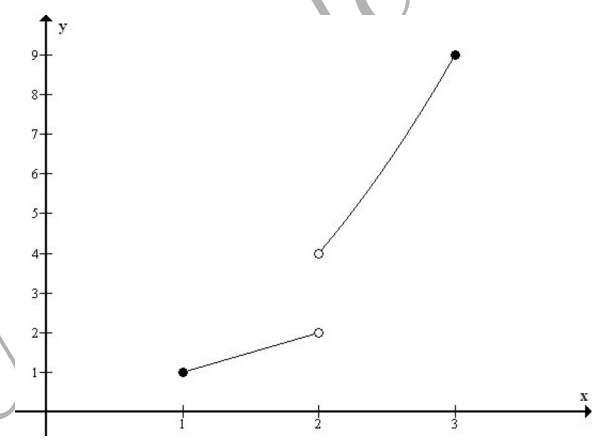


Gráfico en $y = f(x)$

3) *Si* f *y* g *son funciones tales que* $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx = 35$, $\displaystyle\int_3^6 f(x)\, dx = 4$ *y* $\displaystyle\int_1^3 g(x)\, dx = -20$*, calcular*

   a) $\displaystyle\int_3^1 5g(x)\, dx$

   b) $\displaystyle\int_1^3 (f(x) - g(x))\, dx$

   c) $\displaystyle\int_1^6 3f(x)\, dx$

Respuestas: *1)* $-\frac{605}{4}$, *2.a)* $\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, *2.b)* $\frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$, *2.c)* $\frac{47}{6}$, *3.a) 100, 3.b) 55, 3.c) 117.*

10.7 Desafío

Usando la definición correspondiente, calcular $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx$