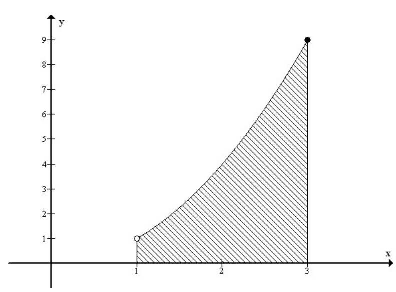
Sesión 14

Cálculo de áreas

Temas	**Capacidades**
✓ Cálculo de áreas.	▷ Calcular áreas de regiones del plano.

14.1 Introducción



Area bajo una curva

En esta sesión se inicia una revisión de las principales aplicaciones de la integral definida. La primera de ellas será la aplicación natural: *cálculo de áreas de regiones del plano*. Se estudian las diferentes situaciones asociadas a este problema.

14.2 Caso 1: Area *bajo* una curva.

Dada una función continua $y = f(x)$ y no negativa en $[a, b]$ $(f(x) \geq 0)$. El área A de la región R del plano delimitada por:

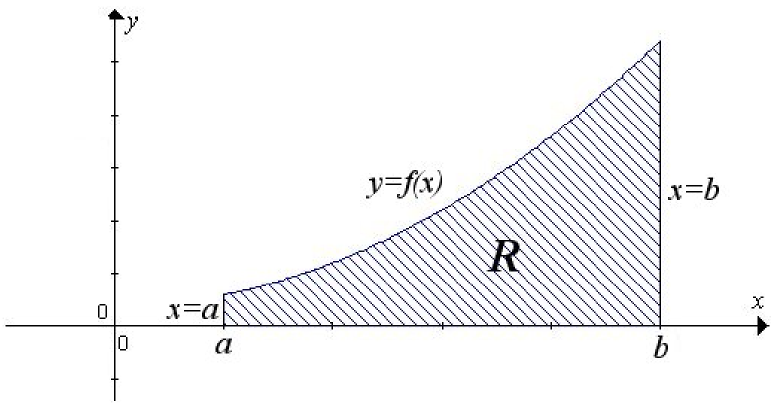
- **Arriba**: Gráfico de la función $y = f(x)$.
- **Abajo**: Eje X.
- **Izquierda**: La recta $x = a$.

- **Derecha**: La recta $x = b$

viene dada, como ya se ha visto, por

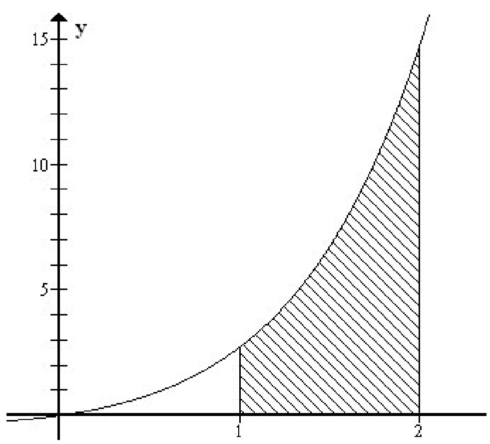
$$\boxed{A = Area(R) = \int_a^b f(x)dx}$$

La región R, gráficamente se ve como:



Región R cuya área se desea calcular

Ejemplo 14.1 *Calcular el área bajo la curva $y = xe^x$ y entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.*
Desarrollo:
La región cuya área se calcula, gráficamente es:



Región R bajo la curva $y = xe^x$

Como la función dada es positiva en el intervalo $[1, 2]$, el área A pedida viene dada por:

$$A = \int_1^2 xe^x\,dx \tag{14.1}$$

Usando la Regla de Barrow, para calcular (14.1), en primer lugar se encuentra una primitiva de xe^x. Usando integración por partes se obtiene:

$$F(x) = \int xe^x\,dx = e^x(x-1)$$

Luego,

$$A = \int_1^2 xe^x\,dx = F(2) - F(1) = e^2 \approx 7.38906$$

Respuesta: El área pedida es igual a, aproximadamente, 7.4(u. de long.)^2.

Ejercicio 14.1 *Calcular el área de la región delimitada por el eje X y la curva*

$$y = \frac{5}{e^x - 1}.$$

entre las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

14.3 Caso 2: Area *sobre* una curva.

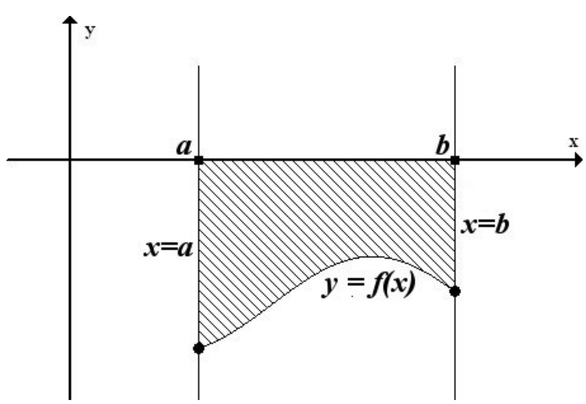
Dada una función continua $y = f(x)$ y no positiva en $[a, b]$ ($f(x) \leq 0$). El área A de la región R del plano delimitada por:

- **Arriba**: Eje X.
- **Abajo**: Gráfico de la función $y = f(x)$.
- **Izquierda**: La recta $x = a$.
- **Derecha**: La recta $x = b$

viene dada por

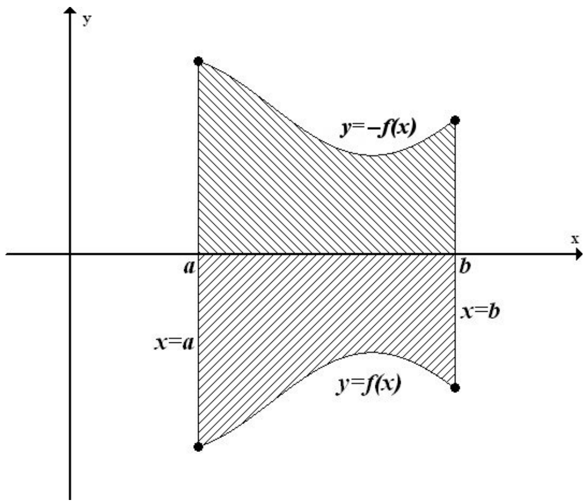
$$\boxed{A = Area(R) = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

La región R, gráficamente se ve como:



Región R cuya área se desea calcular

Nota: Para verificar el Caso 2, se considera la función $y = -f(x)$ y a continuación se aplica en Caso 1.



Interpretación geométrica del área sobre una curva (cuando $f \leq 0$).

Ejercicio 14.2 *Calcular el área de la región delimitada por el eje X y la curva*

$$y = \frac{5}{x^2 + 9x + 14}$$

entre las rectas $x = -5$ y $x = -3$.

14.4 Caso 3: Areas entre dos curvas.

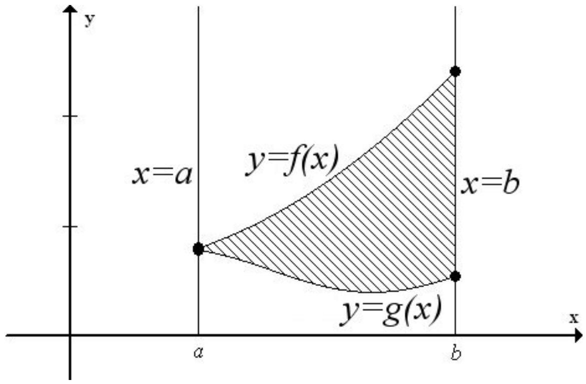
Dadas dos funciones continuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ con $g(x) \leq f(x)$ en $[a, b]$. El área A de la región R del plano delimitada por:

- **Arriba**: Gráfico de la función $y = f(x)$.
- **Abajo**: Gráfico de la función $y = g(x)$.
- **Izquierda**: La recta $x = a$.
- **Derecha**: La recta $x = b$

viene dada por

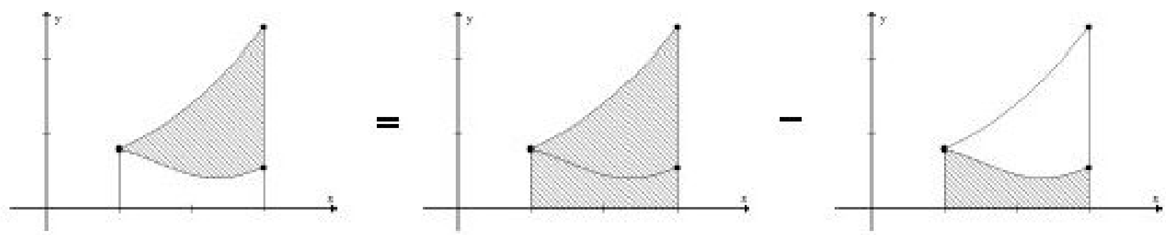
$$\boxed{A = Area(R) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx}$$

La región R, gráficamente se ve como:



Area entre dos curvas

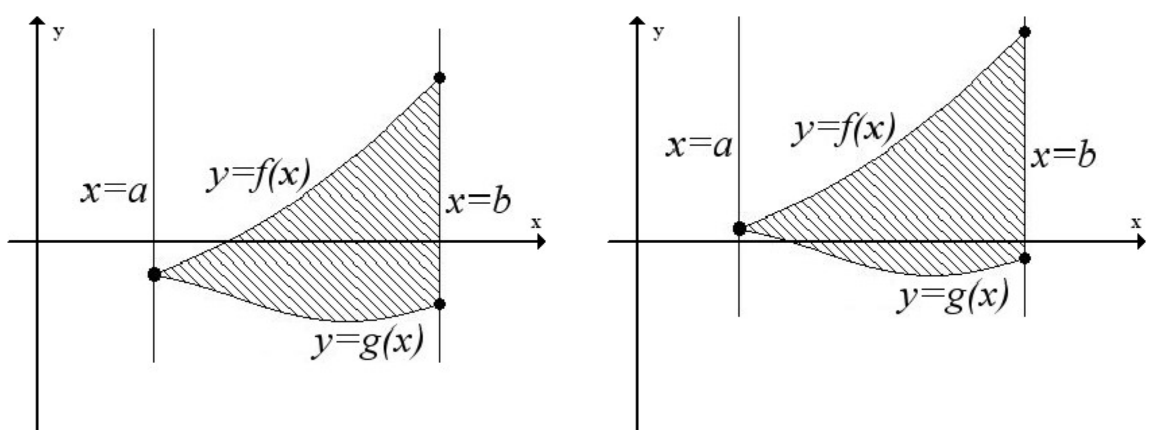
Observación: Para verificar la fórmula del Caso 3, basta observar las siguientes figuras:



$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Ilustración fórmula Caso 3

Ejercicio 14.3 *Verificar que la fórmula precedente también es válida en cada una de las siguientes posiciones de los gráficos de f y g.*



Nota 14.1 Para resolver un problema de áreas del Caso 3, se sugiere seguir los siguientes pasos:

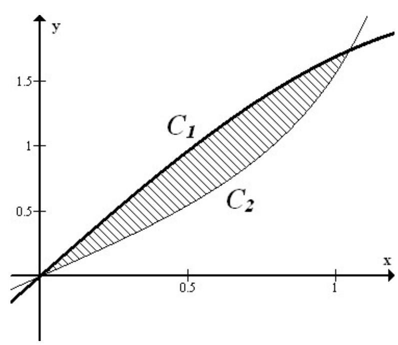
Paso 1: Realizar un esbozo de los gráficos de las funciones.

Paso 2: Determinar los puntos de intersección de ambas curvas.

Paso 3: Plantear y resolver la integral definida que representa el área buscada.

Paso 4: Entregar la respuesta.

Ejemplo 14.2 *La siguiente región viene delimitada por dos curvas, C_1 y C_2, que corresponden, en algún orden, a las gráficas de las funciones $y = f(x) = 2\sin x$ e $y = g(x) = \tan x$.*



Se pide:

1) Identificar las curvas C_1 y C_2, con los gráficos de las funciones dadas.

2) Calcular el área de la región achurada.

Desarrollo:

1) Evaluando ambas funciones para un valor un poco mayor que 0, se tiene que $f(0.2) \approx 0.397$ y $g(0.2) \approx 0.203$. Por lo tanto, el gráfico de $y = f(x)$ corresponde a la curva dibujada con línea más *gruesa*.

2) **Cálculo del área de la región**:

Paso 1: Realizar un esbozo de los gráficos de las funciones.
En este caso, obviamente, no es necesario.

Paso 2: **Determinar los puntos de intersección de ambas curvas**.
Para ello se debe resolver el sistema conformado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} y &=& 2\sin x \\ y &=& \tan x \end{array}\right|$$

Reemplazando el valor de y de la primera ecuación en la segunda, se obtiene:

$$2\sin x = \tan x$$

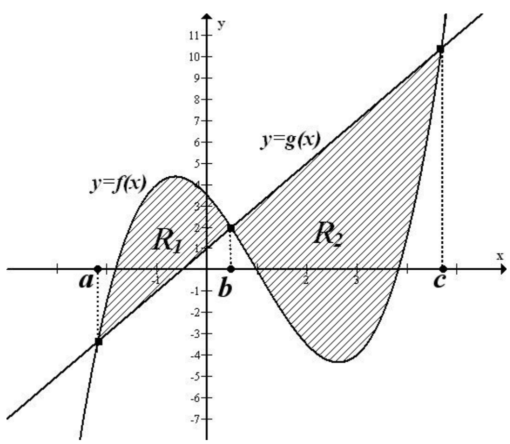
Resolviendo esta ecuación, se obtiene: $x = 0, \quad x = -\dfrac{\pi}{3} \quad x = \dfrac{\pi}{3}$.

Paso 3: **Plantear y resolver la integral definida que representa el área buscada**.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^{\pi/3} (2\sin x - \tan x)\, dx \\ &= (-2\cos x + \ln\cos x)\Big|_0^{\pi/3} \\ &= 1 - \ln 2 \\ &\approx 0.3068 \end{aligned}$$

Paso 4: **Entregar la respuesta**.
El área de la región buscada es 0.3068 unidades de área.

Nota: Una situación más general que se puede presentar al calcular el área de la región limitada por los gráficos de 2 funciones, es la que se muestra en el siguiente gráfico:



Areas entre curvas: situación más general

En este caso el área entre las dos curvas se calcula:

$$A = area(R_1) + area(R_2) = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx + \int_b^c [g(x) - f(x)]\, dx$$

Ejercicio 14.4 *Determinar el área de la región delimitada por las curvas:*

$$y = x^3 - 5x^2 + 4x \quad \text{e} \quad y = x(x-4)$$

14.5 Areas con respecto al eje Y

Al calcular el área de una región, en algunas situaciones es más fácil trabajar dicha región con respecto al eje Y. En este caso, se miran las curvas involucradas considerando a x *como función de* y.

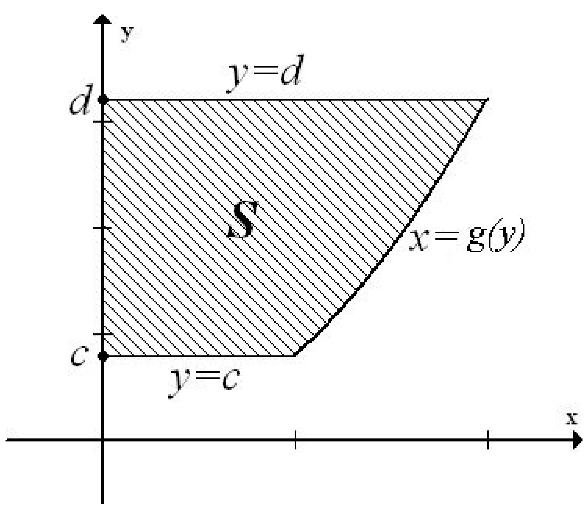
El área A de la región S del plano delimitada por:

- **Izquierda**: Eje Y.
- **Derecha**: Gráfico de la función $x = g(y)$
- **Arriba**: La recta $y = d$
- **Abajo**: La recta $y = c$

viene dada por

$$\boxed{A = Area(S) = \int_c^d g(y)dy}$$

La región S, gráficamente se ve como:

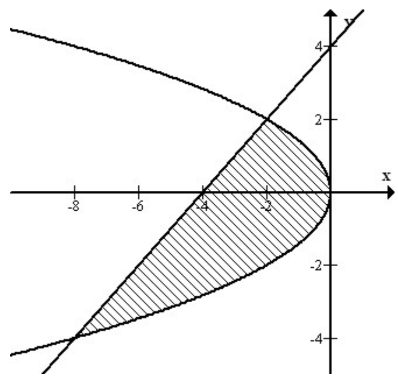


Región S mirada con respecto al eje Y

Ejemplo 14.3 *Calcular el área de la región del plano limitada por la parábola* $y^2 = -2x$ *y la recta* $y - x = 4$.

Desarrollo:

Paso 1: Realizar un esbozo de los gráficos de las funciones.



Paso 2: Determinar los puntos de intersección de ambas curvas

Para ello se debe resolver el sistema conformado por ambas ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} y^2 & = & -2x \\ y - x & = & 4 \end{array}\right|$$

Reemplazando el valor de y de la segunda ecuación en la primera, se obtiene: $(x+4)^2 = -2x$. Resolviendo esta ecuación, se tiene que $x_1 = -8$ y $x_2 = -2$. Sustituyendo estos valores en la segunda ecuación, se tiene que $y_1 = -4$ e $y_2 = 2$. Por lo tanto los puntos de intersección de ambas curvas son: $(-8, -4)$ y $(-2, 2)$.

Paso 3: Plantear y resolver la integral definida que representa el área buscada.

En este caso, resulta *más simple* plantear la integral con respecto al eje Y (¿por qué?).

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-4}^{2} \left[-\frac{y^2}{2} - (y-4) \right] dy \\ &= \int_{-4}^{2} \left(-\frac{y^2}{2} - y + 4 \right) dy \\ &= \left(-\frac{y^3}{6} - \frac{y^2}{2} + 4y \right) \Bigg|_{-4}^{2} \\ &= \left(\frac{-8}{6} - \frac{4}{2} + 8 \right) - \left(\frac{64}{6} - \frac{16}{2} - 16 \right) \\ &= 30 - \tfrac{36}{3} \\ &= 18 \end{aligned}$$

Paso 4: **Entregar la respuesta**.
El área de la región buscada es 18 (unidades de longitud)^2.

14.6 Autoevaluación

1) Calcular el área bajo la curva $y = x^2 \sin x$ y entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

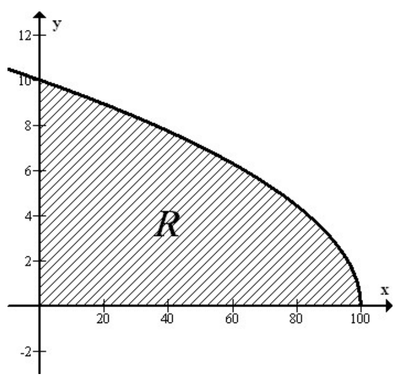
2) Determinar el área de la región delimitada por la curva $y = \frac{1}{x^4+64}$, las rectas $|x| = 1$ y el eje X.

3) Determinar el área de la región delimitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \frac{2}{x^2+1}$.

Respuesta: 1) $\approx 2.2462(u.\ de\ long)^2$. 2) $\approx 0.031(u.\ de\ long)^2$. 3) $\pi - 2/3 \approx 2.475(u.\ de\ long)^2$.

14.7 Desafío

Sea R la región ubicada en el primer cuadrante y delimitada por la gráfica de la función $y = \sqrt{100 - x}$.



Determinar el valor de a, de modo que la recta $x = a$ divida la región R en dos partes de igual área.