

Nombre y Firma: (LÁPIZ PASTA Y LETRA MAYÚSCULA)	NOTA
---	-------------

1. (20 ptos.) Usando el método de cambio de variable, calcular

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

Criterio de corrección:

- Desarrollo claro, ordenado, formalmente correcto y errores algebraicos *pequeños*: **20 puntos**.
- Desarrollo poco claro o poco ordenado, y con errores algebraicos *pequeños*: **10 puntos**.
- Desarrollo con poco avance o errores algebraicos graves: **0 puntos**.

Desarrollo:

Sea $u = x^3 + 1$, de donde $\frac{1}{3}du = x^2 dx$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3}du}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{3} \frac{u^{1/2}}{1/2} + C \\ &= \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{1/2} + C \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 1} + C \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + C$$

2. (20 ptos.) Usando el método de integración por partes, calcular

$$\int x e^{-2x} dx$$

Criterio de corrección:

- Desarrollo claro, ordenado, formalmente correcto y errores algebraicos *pequeños*: **20 puntos**.
- Desarrollo poco claro o poco ordenado, y con errores algebraicos *pequeños*: **10 puntos**.
- Desarrollo con poco avance o errores algebraicos graves: **0 puntos**.

Desarrollo:

Sean $u = x$ y $dv = e^{-2x} dx$

de donde

$$du = dx \quad \text{y} \quad v = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int x e^{-2x} dx &= x \cdot \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} \right) - \int -\frac{1}{2}e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2}x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= -\frac{1}{2}x e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C \\ &= -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x + 1) + C \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\int x e^{-2x} dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}(2x + 1) + C$$

3. (20 ptos.) Resolver la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$$

Criterio de corrección:

- Desarrollo claro, ordenado, formalmente correcto y errores algebraicos *pequeños*: **20 puntos**.
- Desarrollo poco claro o poco ordenado, y con errores algebraicos *pequeños*: **10 puntos**.
- Desarrollo con poco avance o errores algebraicos graves: **0 puntos**.

Desarrollo: Completando cuadrado se tiene $x^2 + 6x + 13 = (x + 3)^2 + 9$

Luego:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 9}$$

Haciendo el cambio de variable $u = x + 3$, con $du = dx$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} &= \int \frac{dx}{(x + 3)^2 + 9} \\ &= \int \frac{du}{u^2 + 2^2} \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) + C \\ &= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x + 3}{2}\right) + C \end{aligned}$$

Respuesta:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13} = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x + 3}{2}\right) + C$$