

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

EDO's: Transformadas de Laplace

Documento de estudio

Profesor:
Claudio del Pino O.

ICE. Semestre de invierno 2024

Indice

1	Transformada de Laplace:	
	Definición y propiedades	1
1.1	Introducción	1
1.2	Integrales impropias	1
1.2.1	Ejemplo 1:	1
1.2.2	Ejemplo 2:	2
1.3	Transformada de Laplace	2
1.3.1	Ejemplo 1	3
1.3.2	Ejemplo 2	3
1.3.3	Ejemplo 3	4
1.3.4	Ejemplo 4	4
1.3.5	Ejemplo 5	5
1.4	Autoevaluación	5
1.5	Linealidad de la Transformada de Laplace.	6
1.5.1	Ejemplo	6
1.5.2	Autoevaluación	6
1.6	Listado de transformadas de Laplace de funciones especiales	7
1.7	TdL para derivada de f	8
1.8	TdL para las derivadas de orden superior de f	9
1.9	Propiedades generales de la TdL	9
1.9.1	Ejemplo 1	9
1.9.2	Ejemplo 2	10
1.9.3	Ejemplo 3	10
1.9.4	Ejemplo 4	11
1.9.5	Autoevaluación	11
1.10	Actividades complementarias	11

Documento de estudio N°

1

Transformada de Laplace: Definición y propiedades

1.1 Introducción

La Transformada de Laplace* es un instrumento útil para resolver EDO. La *gracia* de las *TdL* es que ellas permiten transformar un EDO en un problema algebraico, el cual una vez resuelto (con técnicas algebraicas, obviamente), se puede *regresar* al ambiente de las EDO's para encontrar la solución buscada.

1.2 Integrales impropias

Antes de pasar a la definición de *TdL* recordemos que el símbolo

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt, \quad (1.1)$$

representa una integral impropia, que se define (y calcula) por medio de un límite:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_a^M f(t)dt \quad (1.2)$$

Recordar que cuando el límite de (1.2) existe (finito) se dice que la integral impropia (1.1) converge (o existe).

1.2.1 Ejemplo 1:

Estudiar la convergencia de $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$.

* En lo que sigue, anotaremos por Transformada de Laplace, simplemente, *TdL*

Desarrollo:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_0^b \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3} (e^{-3b} - 1) = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la integral impropia $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$ es convergente, pues su valor es finito ($= \frac{1}{3}$).

1.2.2 Ejemplo 2:

Determinar si integral $\int_0^{+\infty} x e^x dx$ es convergente o divergente.

Desarrollo:

$$\int_0^{+\infty} x e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[(x-1)e^x \Big|_0^b \right] = \lim_{b \rightarrow +\infty} ((b-1)e^b + 1) = +\infty$$

Por lo tanto, la integral impropia propuesta es divergente (no existe).

1.3 Transformada de Laplace

Sea $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ y suponga que $\int_a^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$ converge para ciertos valores de s , entonces para dichos valores se define la nueva función $F(s)$ que se denomina la Transformada de Laplace de f , de la siguiente manera:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Nota 1.1. A continuación se calculan, a modo de ejemplo, las TdL de algunas funciones básicas:

1.3.1 Ejemplo 1

Sea, para todo $t \in \mathbb{R}$: $f(t) = c$, c constante, entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{c\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} c \, dt \\
 &= c \int_0^{+\infty} e^{-st} dt \\
 &= c \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-st} dt \\
 &= c \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-sM}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \\
 &= c \cdot \frac{1}{s}, \quad \text{siempre que } s > 0. \text{ (¿Por qué?)}
 \end{aligned}$$

Luego,

$\mathcal{L}\{c\}(s) = \frac{c}{s}, \quad \text{para } s > 0$

(1.3)

1.3.2 Ejemplo 2

Sea, para todo $t \geq 0$: $f(t) = t$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{t\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} t \, dt \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-st} t \, dt, \text{ integrando por partes} \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-st} \cdot t}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right) \Big|_0^M \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-sM} \cdot M}{s} - \frac{e^{-sM}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right) \\
 &\quad \text{pero } \lim_{M \rightarrow +\infty} M e^{-sM} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} e^{-sM} = 0 \\
 &= \frac{1}{s^2}, \quad \text{siempre que } s > 0
 \end{aligned}$$

Luego,

$\mathcal{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}, \quad \text{para } s > 0$

(1.4)

1.3.3 Ejemplo 3

Sea, para todo $t \geq 0$: $f(t) = e^{ct}$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{e^{ct}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{ct} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{(-s+c)t} dt \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{(-s+c)t} dt \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{(-s+c)t}}{-s+c} \right) \Big|_0^M \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{(-s+c)M}}{-s+c} - \frac{1}{-s+c} \right) \\
 &= -\frac{1}{-s+c}, \quad \text{siempre que } (-s+c) < 0
 \end{aligned}$$

O sea que,

$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{ct}\}(s) = \frac{1}{s-c}, \quad \text{para } s > c} \quad (1.5)$$

1.3.4 Ejemplo 4

Sea, para todo $t \geq 0$: $f(t) = \cos(at)$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{\cos at\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos at \, dt \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M e^{-st} \cos at \, dt, \text{ integrando por partes (2 veces)} \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{-st}}{s^2 + a^2} (-s \cos at + a \sin at) \right) \Big|_0^M \\
 &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \left(-\frac{se^{-sM}}{s^2 + a^2} \cos aM + \frac{e^{-sM}}{s^2 + a^2} \sin aM + \frac{s}{s^2 + a^2} \right) \\
 &= \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \text{siempre que } s > 0
 \end{aligned}$$

ya que $\lim_{M \rightarrow +\infty} e^{-sM} \cos aM = \lim_{M \rightarrow +\infty} e^{-sM} \sin aM = 0$.

Luego,

$$\boxed{\mathcal{L}\{\cos(at)\}(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad \text{para } s > 0} \quad (1.6)$$

1.3.5 Ejemplo 5

Determinar la transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 < t < 5 \\ 3 & \text{si } 5 < t < 10 \\ e^{2t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

Desarrollo:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^5 e^{-st} 2 dt + \int_5^{10} e^{-st} 3 dt + \int_{10}^{\infty} e^{-st} e^{2t} dt \\ &= 2 \int_0^5 e^{-st} dt + 3 \int_5^{10} e^{-st} dt + \int_{10}^{\infty} e^{(2-s)t} dt \\ &= \left(\frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} \right) + \left(\frac{3e^{-5s}}{s} - \frac{3e^{-10s}}{s} \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(2-s)t}}{2-s} \right]_0^b \\ &= \frac{2}{s} + \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{3e^{-10s}}{s} + \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(2-s)b}}{2-s} - \frac{e^{(2-s)10}}{2-s} \right] \\ &= \frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-10(s-2)}}{s-2} \quad \text{para } s > 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{2}{s} - \frac{2e^{-5s}}{s} + \frac{e^{-10(s-2)}}{s-2} \quad \text{para } s > 2$$

1.4 Autoevaluación

Usando la definición de transformada de Laplace, encontrar la transformada de Laplace de $f(t) = t^2$

Nota 1.2. Como es de suponer, es posible calcular la TdL para diversas funciones adicionales. Un listado de las TdL que más se utilizan, se encuentran, más adelante, en una tabla que las resume.

Nota 1.3. Como la TdL se define en base a una integral, que es una transformación lineal, ella también es una transformación lineal. En efecto:

1.5 Linealidad de la Transformada de Laplace.

Teorema 1.2: Sean

- $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, función con $TdL F(s)$ para $s > a$
 - $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, función con $TdL G(s)$ para $s > b$
- entonces si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

para $s > \max\{a, b\}$.

Demostración:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t))(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt + \beta \int_0^{+\infty} e^{-st} g(t)dt \\ &= \alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}(s), \quad \text{para } s > \max\{a, b\} \end{aligned}$$

1.5.1 Ejemplo

Encontrar la TdL de $f(t) = 2e^{-t} + 3\sin(2t)$

Desarrollo: Es claro que, por linealidad de la TdL

$$\mathcal{L}\{2e^{-t} + 3\sin(2t)\}(s) = 2\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s) + 3\mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s) \quad (1.7)$$

Usando (1.5) y (1.6), se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(2e^{-t} + 3\cos(2t))(s) &= 2 \cdot \frac{1}{s+1} + 3 \cdot \frac{s}{s^2+4} \\ &= \frac{2}{s+1} + \frac{3s}{s^2+4} \end{aligned}$$

relación que es válida para $s > \max\{-1, 0\} = 0$.

1.5.2 Autoevaluación

1) Usando la propiedad de linealidad de la TdL , encontrar la TdL de

$$f(t) = -5 + \frac{1}{e^t} + \cos^2 t$$

2) Comprobar su resultado usando el sitio [WIMS](#)

1.6 Listado de transformadas de Laplace de funciones especiales

A continuación se entrega, para efecto de posteriores consultas, un listado con las TdL de las funciones que aparecen con mayor frecuencia.

Listado de TdL de funciones especiales

	$f(t)$	$F(s)$
(1)	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
(1a)	1	$\frac{1}{s}$
(1b)	t	$\frac{1}{s^2}$
(2)	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
(3)	$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
(4)	$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
(5)	$\sinh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
(6)	$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
(7)	$t^n e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
(8)	$t \sin(at)$	$\frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$
(9)	$t \cos(at)$	$\frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$
(10)	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
(11)	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$

Nota 1.4. Para referirnos a estas fórmulas, usaremos la notación $F(n)$, donde n es la fórmula referida de esta tabla.

Nota 1.5. Observar en tabla anterior, que las TdL de las principales funciones siempre son funciones racionales. Este punto es justamente, el que facilita el método de resolver EDO usando TdL .

1.7 TdL para derivada de f

Teorema 1.3: Sea $f(t)$ una función con derivada continua para $t \geq 0$ y de orden exponencial c (ver siguiente nota), cuando $t \rightarrow +\infty$, entonces existe $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ para $s > c$, y

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0) \quad (1.8)$$

Nota: f es de orden exponencial c , cuando existe $M > 0$, tal que $|f(x)| \leq Me^c$ para $t \geq 0$.

Demostración: Es claro que:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

calculando por partes esta integral, eligiendo

$$u = e^{-st} \quad y \quad dv = f'(t) dt$$

se obtiene

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left[e^{-st} f(t) \right]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Como

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} f(t) = 0$, cuando $s > c$ (¿por qué?)
- $[e^{-st} f(t)]_{t=0} = 0$
- $\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = F(s)$

se obtiene el resultado buscado. ■

Nota 1.6. El resultado anterior se extiende naturalmente para calcular las TdL de derivadas de mayor orden. Por ejemplo, aplicando (1.8) a $f''(t)$ y luego a $f'(t)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\{[f'(t)]'\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)) - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (1.9)$$

Así entonces (1.8) y (1.9), se generalizan en el siguiente

1.8 TdL para las derivadas de orden superior de f

Teorema 1.4: Suponiendo que f admite derivadas continuas hasta orden n y satisfacen las mismas condiciones del resultado (1.8), para el mismo valor de c , entonces para $s > c$

$$\mathbf{f}^{(n)}(\mathbf{t}) = \mathbf{s}^n \mathbf{F}(\mathbf{s}) - \mathbf{s}^{n-1} \mathbf{f}(0) - \dots - \mathbf{s}^{n-2} \mathbf{f}'(0) - \mathbf{f}^{(n-1)}(0) \quad (1.10)$$

Junto al listado de fórmulas anteriores, existen varias propiedades de la TdL , que son importantes en la aplicación de estas transformaciones en la resolución de EDO's. A continuación se entrega un listado de ellas:

1.9 Propiedades generales de la TdL

(1)	Definición	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$
(2)	Linealidad	$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \mathcal{L}\{g(t)\}$
(3)	Dilatación	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$
(4)	Derivación	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$
		$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 \mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$
		$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
(5)	Integración	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u) u\right\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}$
(6)	Dualidad	$\mathcal{L}\{t f(t)\} = -F'(s)$
		$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$
(7)	Traslación en s	$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s-a) = \mathcal{L}\{f(t)\}_{s \rightarrow s-a}$
(8)	Traslación en t (1)	$\mathcal{L}\{f(t-a) \cdot \mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-as} F(s)$
(9)	Traslación en t (2)	$\mathcal{L}\{f(t) \mathcal{U}(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t+a)\}$
		$\mathcal{L}\{\mathcal{U}(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}$

Nota 1.7. Para referirnos a estas propiedades, usaremos la notación $P(n)$, donde n es la propiedad referida de esta tabla.

1.9.1 Ejemplo 1

Usando las fórmulas y propiedades de la TdL , encontrar la TdL de la función:

$$f(t) = e^{-7t} + 4t \sin t - t^{10} e^{3t}$$

Solución: Es claro, por linealidad de la TdL :

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-7t}\} + 4\mathcal{L}\{t \sin t\} - \mathcal{L}\{t^{10} e^{3t}\} \quad (1.11)$$

Ahora bien:

- Por la F(4): $\mathcal{L}\{e^{-7t}\} = \frac{1}{s+7}$
- Por la F(10): $\mathcal{L}\{t \sin t\} = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$
- Por la F(7) o P(7): $\mathcal{L}\{t^{10}e^{3t}\} = \frac{10!}{(s-3)^{11}}$

Por lo tanto, reemplazando en (1.11), se tiene:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s+7} + \frac{8s}{(s^2+1)^2} + \frac{10!}{(s-3)^{11}}$$

1.9.2 Ejemplo 2

Usando que $\mathcal{L}\{t^2\}(s) = \frac{2}{s^3}$, encontrar $\mathcal{L}\{t^4\}(s)$.

Solución: Usando la Propiedad de derivación:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0),$$

luego,

$$12 \cdot \frac{2}{s^3} = s^2\mathcal{L}\{t^4\} - s \cdot 0 - 0$$

de donde

$$\mathcal{L}\{t^4\} = \frac{24}{s^5}.$$

1.9.3 Ejemplo 3

Usando la Propiedad de traslación en s , encontrar

- 1) $\mathcal{L}\{e^{at}t^2\}$
- 2) $\mathcal{L}\{e^{at}\sin t\}$

Solución:

- 1) En este caso, $f(t) = t^2$ y $F(s) = \frac{2}{s^3}$ (F(9)).

Usando la propiedad indicada:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \underbrace{t^2}_{f(t)}\} = F(s-a) = \frac{2}{(s-a)^3}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^2\} = \frac{2}{(s-a)^3}$$

- 2) De manera similar, se tiene

$$\mathcal{L}\{e^{at} \underbrace{\sin t}_{f(t)}\} = F(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2+1}, \quad s > a.$$

1.9.4 Ejemplo 4

Usando la propiedad de Dualidad, calcular $\mathcal{L}\{t^2 \sin(bt)\}$.

Solución: Poniendo $f(t) = \sin(bt)$, se tiene que $F(s) = \frac{b}{s^2+b^2}$.

Ahora, por la propiedad de Dualidad:

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin bt\} = (-1)^2 F''(s).$$

Pero $F'(s) = -\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$, y $F''(s) = \frac{2b(3s^2-b^2)}{(s^2+b^2)^2}$, $s > 0$. Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{t^2 \sin(bt)\} = \frac{2b(3s^2 - b^2)}{(s^2 + b^2)^2}$$

1.9.5 Autoevaluación

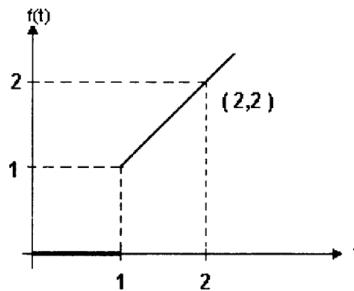
- 1) Determinar: $\mathcal{L}\{5t + 2 - e^{2t} - \cos(5t)\}(s)$
- 2) Encontrar la TdL de $f(x) = e^{-2x}(\sin(t) + \sin(2t))$
- 3) Comprobar sus resultados usando el sitio [WIMS](#)

1.10 Actividades complementarias

- 1) Usando la definición correspondiente, encontrar la TdL de $f(t) = (1 + e^t)^2$.

$$\text{Sol.: } \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-4}, s > 4$$

- 2) Usan la definición correspondiente, encontrar la TdL de la función cuya gráfica es



$$\text{Sol.: } \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-s} \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} \right)$$

- 3) Encontrar, usando la definición correspondiente, la TdL para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(t) = 1 - 2t^2$

c) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 3 \\ t & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$

b) $f(t) = t - 8 + e^t$

d) $f(t) = t^2 e^{-3t}$

Solución:

a) $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{12}{s^4}$

c) $F(s) = \frac{1}{s} (1 + 2e^{-3s}) + \frac{1}{s^2} e^{-3s}$

b) $F(s) = \frac{-7s^2 + 9s - 1}{s^2(s - 1)}$

d) $F(s) = \frac{2}{(s + 3)^3}$

4) Usando la propiedad de dualidad, encontrar $\mathcal{L}\{t^4 e^{at}\}$. **Sol.:** $F(s) = \frac{24}{(s-a)^5}$

5) Encontrar, usando el *Listado de TdL* y las *Propiedades generales de la TdL*, las *TdL* para cada una de las siguientes funciones:

a) $f(t) = e^t \cosh(2t)$

e) $f(t) = \sin(at) \cos(bt)$

b) $f(t) = 3 \sin(4t) - 2 \cos(5t)$

f) $f(t) = \sin^2(t)$

c) $f(t) = t^3 - 4t^2 + 5$

g) $f(t) = \sin^3(t)$

d) $f(t) = e^{-4t}(t^2 + 1)^2$

h) $f(t) = e^{-t} \sin^2 t$

Solución:

a) $F(s) = \frac{s - 1}{(s - 1)^2 - 4}$

e) $F(s) = \frac{as^2 + a(a^2 - b^2)}{[s^2 + (a + b)^2][s^2 + (a - b)^2]}$

b) $F(s) = \frac{-2s^3 + 12s^2 - 32s + 300}{(s^2 + 16)(s^2 + 25)}$

f) $F(s) = \frac{2a^2}{s(s^2 + 4a^2)}$

c) $F(s) = \frac{5s^3 - 8s + 6}{s^4}$

g) $F(s) = \frac{6}{(s^2 + 1)(s^2 + 9)}$

d) $F(s) = \frac{24 + 4(s + 4)^2 + (s + 4)^4}{(s + 4)^5}$

h) $F(s) = \frac{2}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$

Bibliografía

- [1] **Carmona, I. & Filio, L.** *Ecuaciones diferenciales*. Pearson Educación, México, 2011.
- [2] **Espinoza. E. (Coordinador)** *Ecuaciones diferenciales*. Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco Editorial Reverté. 2010.
- [3] **Canek: Portal de Matemática.** *Ecuaciones diferenciales ordinarias*.
Sitio web: <http://canek.uam.mx/index.php>.
- [4] **López M. & Acero Ignacio.** *Ecuaciones Diferenciales. Teoría y problemas*. Editorial Tébar. 2007.
- [5] **Martínez Sandoval, Leonardo.** *El blog de Leo*.
Sitio web: <https://blog.nekomath.com/ed1/>.
- [6] **Nagle, R., Saff, E. & Snider, A..** *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera*. 4ta edición. Addison Wesley. 2005.
- [7] **Rainville, E., Bedient, P. & Bedient, R..** *Ecuaciones diferenciales*. Prentice-Hall.
- [8] **Spiegel, M..** *Ecuaciones diferenciales, aplicadas*. Prentice-Hall. 1983.
- [9] **Zill, D..** *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning Editores. 2009.