$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$



# Parte 2 (de 3)
# EDO's: Transformada inversa de Laplace

**Documento de estudio**

Profesor:
Claudio del Pino O.

ICE. Semestre de invierno 2024

Documento de estudio N° 2

# Transformada de Laplace: Transformada inversa de Laplace



## Índice

## 2.1 Introducción

Como ya se ha visto en la sesión precedente, la transformada de Laplace *transforma* una función de variable $t$, $f(t)$, en una función de variable $s$: $F(s)$.

El objetivo de esta transformación es llevar el problema de la resolución de una ecuación diferencial a un problema algebraico más sencillo.

Es necesario que, habiendo hecho esta transformación sea posible regresar con la solución, mediante un *proceso inverso* a la transformada de Laplace: *la transformada inversa de Laplace:* $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

## 2.2 Transformada inversa de Laplace

**Definición**: Si, dada la función $F(s)$ *existe una función* en $[0,+\infty[$ $f(t)$ *tal que*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

*entonces se dice que* $f(t)$ *es la transformada inversa de Laplace de* $F(s)$ *y se denota por:*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

## 2.3 Linealidad de la transformada inversa de Laplace

**Teorema 2.1**: **Linealidad de la transformada de Laplace inversa**
*Si* $F(s)$ y $G(s)$ *son funciones para las cuales existen funciones* $f(t)$ y $g(t)$ *con la propiedad de que* $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ *y* $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = G(s)$ *respectivamente y* $\alpha$ y $\beta$ *son constantes, entonces:*

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{G(z)\}$$

**Nota 2.1.** Es posible calcular la transformada inversa de Laplace, por un mecanismo similar al cálculo de las integrales: mirando la tabla de las trasformadas *en el sentido inverso* y aplicando la importante propiedad de linealidad, recién destacada, que tiene la transformada inversa. Veamos los siguientes ejemplos.

### 2.3.1 Ejemplo 1

Calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\}.$$

**Solución**: Mirando el listado de $TdL$ , *de derecha a izquierda*, se observa directamente, a partir de F(4), con $a = 3$, que:

$$\mathcal{L}\{\cos(3t)\} = \frac{s}{s^2 + 3^2}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 3^2}\right\} = \cos(3t)$$

### 2.3.2 Ejemplo 2

Calcular

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\}.$$

**Solución**:

**Método 1 (Usando fracciones parciales):** Como

$$\frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)$$

se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\right\}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\
&= \sinh(t)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2 - 1}\right\} = \sinh(t)$$

**Método 2 (Usando el Formulario):**

Observar que se obtiene el resultado buscado, aplicando directamente la F(5).

### 2.3.3 Ejemplo 3

$$\text{Calcular } \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\}.$$

Notar que este caso es distinto al anterior, pues aquí no se puede factorizar (en $\mathbb{R}$) el denominador, razón por la cual no se pueden usar fracciones parciales.

**Solución**: Completando cuadrado en el denominador, se tiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s+5}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s+1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t)$$

El último paso ese usó la fórmula F(5) junto a la Propiedad de *Traslación en s*.

**Ejemplo 2.1.** *Calcular* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s-2)(s^2+4)}\right\}$.

**Solución***:* Descomponiendo $\frac{2s}{(s-2)(s^2+4)}$ en fracciones parciales:

$$\frac{2s}{(s-2)(s^2+4)} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}.$$

Aplicando $\mathcal{L}^{-1}$ y usando su linealidad, se tiene:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s-2)(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} \tag{2.1}$$

Ahora bien, de acuerdo a las Fórmulas de TdL:

- $F(2): \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$,
- $F(3): \mathcal{L}\{\operatorname{sen} at\} = \frac{a}{s^2+a^2}$,
- $F(4): \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2}$

se tiene que:

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = e^{2t}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2^2}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2t)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} = \cos(2t)$

Sustituyendo estas trasformadas inversas de Laplace en (2.1):

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s-2)(s^2+4)}\right\} = \frac{1}{2}e^{2t} + \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

**Nota 2.2.** Es claro que $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$, para $s > 0$.Ahora bien, por inspección del ejemplo (19.3) de la sección anterior, se deduce que la transformada inversa de una función, en general, no es única: La funciones del (ejemplo 19.3) y la función $f(t) = 1$, tienen la misma TdL: $F(s) = \frac{1}{s}$.

En todo caso, se puede demostrar que para *dos funciones continuas* en $[0, +\infty[$: $f(t)$ y $g(t)$, entonces

$$\boxed{F(s) = G(s) \quad \Longrightarrow \quad f(t) = g(t), \text{ para } t \geq 0}$$

### 2.3.4 Autoevaluación

1) Encontrar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2s+2}\right\}$

2) Determinar $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s^2-2s+10)}\right\}$

3) Comprobar sus resultados usando el sitio **WIMS**

## 2.4 Actividades complementarias

Calcular las siguientes transformadas inversas de Laplace:

1) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}$ **Sol.**: $f(t) = \frac{t^3}{6}$

2) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{6s+3}\right\}$ **Sol.**: $f(t) = \frac{1}{6}e^{-t/2}$

3) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+4}\right\}$ **Sol.**: $f(t) = \cos(2t) + \frac{1}{2}\sin(2t)$

4) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+2s}\right\}$ **Sol.**: $f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right)$

5) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)^2}\right\}$ **Sol.**: $f(t) = e^{-2t} - 2te^{-2t}$

6) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}\right\}$ **Sol.**: $f(t)=\frac{1}{3}\left(\sin t-\sin(2t)\right)$

7) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-3s+2}\right\}$ **Sol.**: $f(t)=e^{2t}-e^{t}$

8) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2+3s+3}{(s+2)^3}\right\}$ **Sol.**: $f(t)=e^{-2t}-te^{-2t}+\frac{1}{2}t^2e^{2t}$

9) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s^2}{(s+1)(s^2+1)}\right\}$ **Sol.**: $f(t)=e^{-t}+\cos(t)-\sin(t)$

# Bibliografía




[1] **Carmona, I. & Filio, L.** *Ecuaciones diferenciales*. Pearson Educación, México, 2011.

[2] **Espinoza. E. (Coordinador)** *Ecuaciones diferenciales*. Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Azcapotzalco Editorial Reverté. 2010.

[3] **Canek: Portal de Matemática**. *Ecuaciones diferenciales ordinarias.*
Sitio web: http://canek.uam.mx/index.php.

[4] **Lopéz M. & Acero Ignacio**. *Ecuaciones Diferenciales. Teoría y problemas.* Editorial Tébar. 2007.

[5] **Martínez Sandoval, Leonardo**. *El blog de Leo.*
Sitio web: https://blog.nekomath.com/ed1/.

[6] **Nagle, R., Saff, E. & Snider, A.**. *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores de frontera*. 4ta edición. Addison Wesley. 2005.

[7] **Rainville, E., Bedient, P. & Bedient, R.**. *Ecuaciones diferenciales*. Prentice-Hall.

[8] **Spiegel, M.**. *Ecuaciones diferenciales, aplicadas*. Prentice-Hall. 1983.

[9] **Zill, D.**. *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Cengage Learning Editores. 2009.