1. **(20 pts.)**

   a) Calcular la TdL de $f(t) = t + e^{2t}\sin(t) + t^2\,\mathcal{U}(t-3)$

   Desarrollo: Usando las fórmulas (1b), (10) y propiedad de traslación en t (1) o (2), se tiene:

$$F(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s-2)^2+1} + e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)$$

   b) Determinar la TdL inversa de $G(s) = \dfrac{(s+2)^2}{s^4-16}$

   Desarrollo: Usando que $s^4 - 16 = (s-2)(s+2)(s^2+4)$, se tiene

$$\frac{(s+2)^2}{s^4-16} = \frac{s+2}{(s-2)(s^2+4)}$$

   Usando fracciones parciales,

$$\frac{(s+2)^2}{s^4-16} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4}$$

   Finalmente, usando las fórmulas (2) y (4):

$$g(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}\cos(2t)$$

2. **(20 ptos.)** Usando la TdL, resolver el siguiente PVI

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6.$$

Desarrollo: Aplicando la TdL a ambos lados de la EDO, simplificando y ordenando, se obtiene:

$$Y(s) = \frac{2}{s-3} + \frac{2}{(s-3)^5}$$

Ahora, para obtener la función $y(t)$, aplicamos la TdL inversa:

$$y(t) = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-3}\right) + 2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s-3)^5}\right)$$

de donde,

$$y(t) = 2e^{3t} + \frac{1}{12}t^4 e^{3t}$$

3. **(20 ptos.)**

Supongamos que una masa de 1kg alarga 5m un resorte. La masa se libera dos metros por debajo de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 3m/s. Suponiendo que la fuerza amortiguadora es 4 veces la velocidad instantánea de la masa, se pide

a) **(05 ptos.)** Plantear la EDO que modela la situación planteada. No olvidar indicar las condiciones iniciales. Tomar $g = 10m/seg^2$

Nota: El modelo matemático de un sistema de masa-resorte libre amortiguado, viene dado por la siguiente EDO:

$$mx'' + rx' + kx = 0$$

donde

- $x = x(t)$ es la posición de la masa en el instante t
- m es la masa del objeto
- r es la constante de proporcionalidad de la velocidad
- k es la constante elástica del resorte (es la que interviene en la Ley de Hooke)

Desarrollo: Sustituyendo los datos del problema se obtiene que el modelo viene dado por:

$$x'' + 4x' + 2x = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -3$$

Nota: De $1 \cdot 10 = k \cdot 5$ (Ley he Hooke), se tiene que $k = 2$.

b) **(15 ptos.)** Usando TdL, determinar la ecuación, $x(t)$, del movimiento de esta masa.

Desarrollo: Aplicando la TdL a la EDo anterior:

$$\underbrace{s^2X(s) - 2s + 3}_{\mathcal{L}(x'')} + 4\underbrace{sX(s) - 2}_{\mathcal{L}(x')} + 2X(s) = 0$$

Despejando $X(s)$:

$$X(s) = \frac{2s+5}{s^2+4s+2}$$

Ordenando el numerador para aplicar la TdL inversa:

$$X(s) = 2\frac{s+2}{(s+2)^2 - (\sqrt{2})^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+2)^2 - (\sqrt{2})^2}$$

de donde, finalmente, la ecuación que describe el movimiento de la masa es:

$$x(t) = 2e^{-2t}\cosh(\sqrt{2}t) - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2t}\sinh(\sqrt{2}t)$$