

1. Cálculo de la Transformada de Laplace (TdL), usando fórmulas y propiedades.

Determinar, usando fórmulas y propiedades, la TdL de

$$a) f_1(t) = t^2 e^{2t}$$

$$\text{Sol.: } \frac{2}{(s-2)^3}$$

$$b) f_2(t) = (t-1)^2 \mathcal{U}(t-1)$$

$$\text{Sol.: } \frac{2e^{-s}}{s^3}$$

$$c) f_3(t) = t^2 \mathcal{U}(t-1)$$

$$\text{Sol.: } \frac{e^{-s}}{t^3} \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{2}{s^3} \right)$$

2. Cálculo de TdL inversa usando fórmulas y propiedades

$$\text{Determinar: } \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{(s-1)(s^2+1)} \right\}$$

$$\text{Sol.: } \frac{1}{2} (3e^t - \sin(t) - 3 \cos(t))$$

3. Resolución de EDO usando TdL

Resolver, usando TdL:

$$y'' + y = \mathcal{U}(t-1), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

$$\text{Sol.: } y(t) = (1 - \cos(t-1)) \mathcal{U}(t-1)$$

4. Problemas de modelamiento.

Descomposición radiactiva. Una muestra de un elemento radiactivo se descompone a una tasa proporcional a la cantidad $y(t)$ presente, donde k_1 es la constante de proporcionalidad. Supóngase que a partir del instante $t = a$ se permite la entrada de una cantidad adicional del elemento con una tasa constante k_2 .

- i) Determinar el modelo matemático de la situación planteada. No olvidar incluir la condición inicial.

$$\text{Sol.: } y'(t) = -k_1 y(t) + y_2(t) \mathcal{U}(t-a)$$

- ii) Utilizando la transformada de Laplace para encontrar la cantidad del elemento, $y(t)$, en el instante t .

$$\text{Sol.: } y(t) = y(0)e^{-k_1 t} + \frac{k_2}{k_1} \mathcal{U}(t-a)(1 - 2^{-k_1(t-a)})$$

- iii) Trazar la gráfica de $y(t)$ para con $k_1 = 1$, $k_2 = .5$, $a = 1$, $y(0) = 1$, $0 \leq t \leq 20$.

Para estos valores $y(t) = e^{-t} + 0.5 \mathcal{U}(t-1)[1 - e^{1-t}]$ y su gráfico es

