4.1 EDO exacta

Una EDO escrita en la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.1}$$

R

se dice exacta, cuando existe una función $\phi = \phi(x,y)$ que cumple

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = M(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$$

y en tal caso, la función $\phi(x,y) = c$ es la solución general de (4.1).

$M\,dx + N\,dy = 0$

$N\,dy = -M\,dx$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N}$

Exacta

Teorema 4.1. *La EDO (4.1) es exacta en un dominio D, siempre y cuando se cumpla que*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

siempre que las funciones M y N tengan derivadas parciales continuas en D.

4.2.1 Ejemplo

Resolver la ecuación $\underbrace{(y^2 - 3x^2y + 1)}_{M(x,y)}dx + (\underbrace{2xy - x^3 + y}_{N(x,y)})dy = 0$

4.2.1 Ejemplo

Resolver la ecuación $(\underbrace{y^2 - 3x^2y + 1}_{M})dx + (\underbrace{2xy - x^3 + y}_{N})dy = 0$

Paso 1: Verificar, usando el teorema (4.1) que la ecuación a resolver es, efectivamente, una EDO exacta.

¿ $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$?

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 - 3x^2y + 1) = 2y - 3x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - x^3 + y) = 2y - 3x^2$$

iguales

$\therefore$ la EDO es EXACTA

Paso 2: Buscar $\phi = \phi(x, y)$ tal que $\frac{\partial \phi}{dx} = M(x,y)$, y $\frac{\partial \phi}{dy} = N(x,y)$ (*)

4.2.1 Ejemplo

Resolver la ecuación $(y^2 - 3x^2y + 1)dx + (2xy - x^3 + y)dy = 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 - 3x^2 y + 1$$

$$\phi = \int (y^2 - 3x^2 y + 1)\, dx \quad ???$$

$$\phi = \underbrace{y^2 x - x^3 y + x}\, + \underbrace{c(y)}_{cte}$$

(*) $$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N$$

$$\cancel{2yx} - \cancel{x^3} + c'(y) = \cancel{2xy} - \cancel{x^3} + y$$

$$c'(y) = y \longrightarrow c(y) = \int y\, dy = \frac{1}{2} y^2$$

Paso 3: La solución general implícita de (4.1) viene dada por $\phi(x, y) = c$.

La solución general implícita es:

$$\underbrace{\boxed{y^2 x - x^3 y + x + \frac{1}{2} y^2 = c}}_{\phi(x,y) = c}$$

4.2.1 Ejemplo

Resolver la ecuación $(y^2 - 3x^2y + 1)dx + (2xy - x^3 + y)dy = 0$

Comprobar que la solución encontrada, efectivamente es solución. (TAREA)

Actividad clave: Resolver la EDO

$$(3x^2 + 6xy + y^2 + 2)dx + (3x^2 + 2xy - 1)dy = 0 \quad (*)$$

$\phi_x = M(x,y)$ $\qquad N(x,y) = \phi_y$

1) ¿ $(*)$ es EXACTA ?

¿ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$?

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy + y^2 + 2)$$

$$= 6x + 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy - 1)$$

$$= 6x + 2y$$

$\Rightarrow$ $(*)$ es exacta.

2) Buscar ϕ t.q.

$\phi_x = M$, $\phi_y = N$

$\phi_x = 3x^2 + 6xy + y^2 + 2$

$\phi = x^3 + 3x^2 y + y^2 x + 2x + c(y)$

$\phi_y = 3x^2 + 2xy + c'(y)$

$= 3x^2 + 2xy - 1$ EC

$\therefore c'(y) = -1 \Rightarrow$

$c(y) = -y$

Luego, la solución general es:

$$\boxed{x^3+3x^2y+y^2x+2x-y=C}$$

$$\boxed{\phi(x,y)=C}$$