

4.1 EDO exacta

Una EDO escrita en la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

(4.1)

se dice exacta, cuando existe una función $\phi = \phi(x, y)$ que cumple

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

y en tal caso, la función $\phi(x, y) = c$ es la solución general de (4.1).

Exacta

Teorema 4.1. La EDO (4.1) es exacta en un dominio D , siempre y cuando se cumpla que

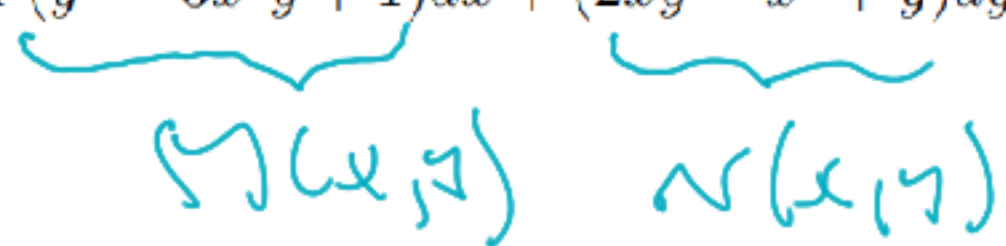
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

siempre que las funciones M y N tengan derivadas parciales continuas en D .

$$\begin{aligned} M dx + N dy &= 0 \\ N dy &= -M dx \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{M}{N} \end{aligned}$$

4.2.1 Ejemplo

Resolver la ecuación $(y^2 - 3x^2y + 1)dx + (2xy - x^3 + y)dy = 0$



Handwritten blue annotations identifying the terms of the differential equation:

- A bracket under $(y^2 - 3x^2y + 1)$ is labeled $M(x,y)$.
- A bracket under $(2xy - x^3 + y)$ is labeled $N(x,y)$.

Paso 1: Verificar, usando el teorema (4.1) que la ecuación a resolver es, efectivamente, una EDO exacta.

$$\oint \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 - 3x^2y + 1) = 2y - 3x^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (2xy - x^3 + y) = 2y - 3x^2$$

← ← iguales

∴ La EDO es EXACTA

4.2.1 Ejemplo

Resolver la ecuación $(y^2 - 3x^2y + 1)dx + (2xy - x^3 + y)dy = 0$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_M \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_N$

Paso 2: Buscar $\phi = \phi(x, y)$ tal que $\frac{\partial \phi}{\partial x} = M(x, y)$ y $\frac{\partial \phi}{\partial y} = N(x, y)$

4.2.1 Ejemplo

Resolver la ecuación $(y^2 - 3x^2y + 1)dx + (2xy - x^3 + y)dy = 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 - 3x^2y + 1$$

$$\phi = \int (y^2 - 3x^2y + 1) dx \quad ???$$

$$\phi = y^2x - x^3y + x + c(y)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = N$$

$$2xy - x^3 + c'(y) = 2xy - x^3 + y$$

$$c'(y) = y \rightarrow c(y) = \int y dy = \frac{1}{2}y^2$$

Paso 3: La solución general implícita de (4.1) viene dada por $\phi(x, y) = c$.

4.2.1 Ejemplo

Resolver la ecuación $(y^2 - 3x^2y + 1)dx + (2xy - x^3 + y)dy = 0$

La solución general
implícita es:

$$y^2x - x^3y + x + \frac{1}{2}y^2 = C$$

$$\phi(x, y) = C$$

Comprobar que la solución encontrada, efectivamente es solución. (TABLEA)

Actividad clave: Resolver la EDO

$$(3x^2 + 6xy + y^2 + 2)dx + (3x^2 + 2xy - 1)dy = 0 \quad (*)$$

$$\phi_x = M(x, y) \quad N(x, y) = \phi_y$$

1) ¿[*] $\rightarrow$ EXACTA?

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} ?$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 6xy + y^2 + 2)$$

$$= 6x + 2y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 + 2xy - 1)$$

$$= 6x + 2y$$

2) Buscan ϕ t. s.
 $\phi_x = M, \phi_y = N$

$$\phi_x = 3x^2 + 6xy + y^2 + 2$$

$$\phi = \frac{x^3}{3} + 3x^2y + \frac{y^2}{2}x + 2x + C(y)$$

$$\phi_y = 3x^2 + 2xy + C'(y)$$

$$= 3x^2 + 2xy - 1 \quad \text{EC.}$$

$$\therefore C'(y) = -1 \Rightarrow$$

$$C(y) = -y$$

$\Rightarrow (*)$ es exacta.

2 upgr, la solución
general es:

$$x^3 + 3x^2y + y^2x + 2x - y = C$$

$$\phi(x, y) = C$$