5.1 Actividad inicial: Reduciendo una EDO no exacta a una exacta

Dada la ecuación

$$6xy\,dx + (4y + 9x^2)\,dy = 0 \tag{5.1}$$

M N

se pide

1) Comprobar que (5.1) no es una ecuación diferencial exacta.

2) Verificar que al transformar la ecuación (5.1) multiplicándola por el factor y^2, se obtiene una ecuación exacta.

3) Encontrar la solución general de la ecuación exacta obtenida, la cual también será la solución general de (5.1).

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 18x$$

$$(6xy^3)\,dx + (4y^3 + 9x^2y^2)\,dy = 0 \quad (*)$$

M N

¿Es exacta?

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 18xy^2 \quad \| \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 18xy^2$$

$\therefore$ $(*)$ es EXACTA

1) La actividad inicial muestra que ciertas ecuaciones que no son exactas, se pueden transformar en una ecuación exacta multiplicándola por una factor adecuado. Este factor recibe el nombre de *factor integrante*. Así entonces, una función diferenciable, no nula, $\mu(x, y)$ es un factor integrante de la EDO:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

cuando la EDO

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0,$$

es una EDO exacta.

2) No existe un procedimiento general que permita descubrir factores integrantes. Hay dos casos especiales que se comentan a continuación.

3) Una EDO no homogénea puede admitir más de un factor integrante, por ejemplo la EDO $ydx - xdy = 0$, admite los siguientes factores integrantes: $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{x^2}$ y $\frac{1}{xy}$. Verificarlo!

Factor integrante del tipo $\alpha(x)$, es decir, que solo depende de x.

Teorema 5.1. *La ecuación*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.2}$$

admite como factor integrante una función que solo depende de x, cuando se cumple que

$$\frac{M_y(x,y) - N_x(x,y)}{N(x,y)} = h(x)$$

depende exclusivamente de x, y en tal caso un factor integrante viene dado por:

$$\alpha(x) = e^{\int h(x)dx}.$$

Sea $\mu(x,y)$ un F. I de (5.2)

$\mu M dx + \mu N dy = 0$ (Exacta)

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N)$$

$$\mu M_y + M \mu_y = \mu N_x + N \mu_x$$

$$\mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x$$

$$\rightarrow \quad \mu(M_y - N_x) = N\mu_x - M\cancel{\mu_y} \to 0$$

(condición general)

μ = solo depende de x

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\mu_x}{\mu}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu_x}{\mu} = \boxed{\frac{M_y - N_x}{N}} \rightarrow \boxed{\text{debe solo depender de } x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln \mu(x)\right) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(\mu(x))\right) = \frac{M_y - N_x}{N}$$

$$\ln(\underline{\underline{\mu(x)}}) = \int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx$$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}\,dx}$$

5.3 Factor integrante del tipo $\alpha(y)$, es decir, que solo depende de y.

De manera análoga a la demostración anterior, se verifica el siguiente

Teorema 5.2. *La ecuación*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{5.5}$$

admite como factor integrante una función que solo depende de y, cuando se cumple que

$$\frac{N_x(x,y) - M_y(x,y)}{M(x,y)} = h(y)$$

depende exclusivamente de y, y en tal caso un factor integrante viene dado por:

$$\alpha(y) = e^{\int h(y)\,dy}.$$

5.4.1 Ejemplo 1

Resolver la ecuación

$$(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0. \tag{5.7}$$