EDO lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = F(x) \quad (*_1) \longleftarrow$$

<u>Solución:</u> ✓ 1) Buscar sol. gral de

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

"y_h" $\longleftarrow$

✓ 2) Buscar una solución particular de $(*_1)$

"y_p" $\longleftarrow$

entonces $y = y_h + y_p$ Sol. gral de $(*_1)$

Vamos a estudiar cómo encontrar la S.G. de

$$\boxed{y'' + p y' + q y = 0 \,, \quad p, q \in \mathbb{R}} \quad (*)$$

1) ¿Cuál era la solución de

$$y' + p y = 0$$

$$y' = -p y \longrightarrow \frac{y'}{y} = -p \longrightarrow (\ln y)' = -p$$

$$\longrightarrow \ln y = \int -p\,dx \longrightarrow \ln y = -p x$$

$$\boxed{y = e^{-px}}$$

2) Buscamos soluciones de

(*) $y'' + p y' + q y = 0$ (*)

de la forma $\boxed{y = e^{\lambda x}}$

$y' = \lambda e^{\lambda x}$

$y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

Reemplazando en (*)

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p \lambda e^{\lambda x} + q e^{\lambda x} = 0$$

$$\underbrace{e^{\lambda x}}_{\neq 0} \left[\lambda^2 + p\lambda + q \right] = 0 \longrightarrow$$

(**) $\boxed{\lambda^2 + p\lambda + q = 0}$ → Ec. característica de (*)

Las soluciones (*) dependen de las soluciones de (**) o sea, la soluciones de

$$y'' + p y' + q y = 0 \quad (*)$$

dependen de las soluciones de (**)

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

cuyas soluciones dependen del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = p^2 - 4q$

Caso 1: $\Delta > 0$

La Ec. característica (**) tiene 2 soluciones reales y distintas, digamos: λ_1, λ_2,

la ec. (*) tiene soluciones:

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

y además y_1, y_2 son l.i

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0 \longrightarrow c_1 = c_2 = 0$$

o $W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_2 \underbrace{e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x}} - \lambda_1 \underbrace{e^{\lambda_1 x} e^{\lambda_2 x}}$$

$$= \underbrace{e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x}}_{\neq 0} \underbrace{\left[\lambda_2 - \lambda_1 \right]}_{\neq 0} \neq 0$$

(Estamos en caso 1)

$\therefore \; y_1 = e^{\lambda_1 x}, \; y_2 = e^{\lambda_2 x}$ son l.i.

Finalmente, cuando $\Delta > 0$: $\rightarrow$ las soluciones de $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

La solución general de forma sol. probable $y = e^{\lambda t}$

$y'' + py' + qy = 0$

es

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}}$$

Ejemplo Caso 1

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (*) \qquad (p = -1,\ q = -2)$$

Ec. Característica:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}}$$

Caso 1

∴ La sol. gral de $(*)$:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$$

Caso 2: $\Delta = 0$

Raíces reales e iguales.

$r^2 + pr + q = 0 \rightarrow \Delta = p^2 - 4q = 0$

Soluciones: $r_1, r_1 (= r)$

$y = e^{rx}$ es una sol. $y'' + py' + qy = 0$

¿¿ y la otra ??

La otra se obtiene con la FÓRMULA DE ABEL

Fórmula de Abel:

$y'' + py' + qy = 0$ ← UNA solución es y_1

entonces otra solución (l.i. con y_1) es:

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{y_1^2}\,dx}$$

Aquí:

$y_1 = e^{\lambda x}$, luego

$$y_2 = e^{\lambda x} \cdot \int \frac{e^{-\int p\,dx}}{(e^{\lambda x})^2} = e^{\lambda x} \int \frac{e^{-px}}{e^{2\lambda x}}\,dx$$

$$= e^{\lambda x} \boxed{\int \frac{\cancel{e^{-px}}}{\cancel{e^{-px}}}\,dx} = e^{\lambda x} \int 1\,dx = x e^{\lambda x}$$

¿λ?, $\lambda = \dfrac{-p \pm \sqrt{\Delta \to 0}}{2} = -\dfrac{p}{2}$ otra sol.

$r^2 + p\lambda + q = 0$

∴ la sol. Gen.

de $y'' + \beta y' + \gamma y = 0$

en el caso 2 (UNA solución única $= \lambda$)

es: $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

$$y = e^{\lambda x}\left[c_1 + c_2 x\right]$$

Resumen:

Caso 1, Caso 2 (Falta Caso 3)

Resolver: $y'' + py' + qy = 0 \; (*)$

$(**)$ $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ (Se resuelve)

Caso 1: Sol. de $(**)$ son reales y $\neq$ s: λ_1, λ_2

sol. general de $(*)$ es $\boxed{y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}}$

Caso 2: Sol. de $(**)$ es única sol: λ

Sol. Gen. de $(*)$ $\boxed{y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}}$

Cas 3 : $\Delta < 0$

$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ $\qquad \Delta = \boxed{p^2 - 4q} < 0$

Sea $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$

$(i = \sqrt{-1})$

La sol. general:

$$Y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

$$Y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2 e^{(a-bi)x}$$

$$Y = C_1 e^{ax} e^{bxi} + C_2 e^{ax} \cdot e^{-bxi}$$

$$y = e^{ax}\left(c_1 e^{bxi} + c_2 e^{-bxi}\right)$$

usando identidad de Euler:

$$y = e^{ax}\left(c_1\left[\cos(bx) + i\,\mathrm{sen}(bx)\right] + c_2\left[\cos(-bx) + i\,\mathrm{sen}(-bx)\right]\right)$$

$$y = e^{ax}\left(c_1 \cos bx + i c_1\,\mathrm{sen}(bx) + c_2 \cos bx - i c_2\,\mathrm{sen}(bx)\right)$$

$$y = e^{ax}\left((c_1 + c_2)\cos bx + (ic_1 - ic_2)\,\mathrm{sen}\,bx\right)$$

$$\lambda = a \pm bi \Rightarrow y = e^{ax}\left(A_1 \cos bx + A_2\,\mathrm{sen}\,bx\right)$$

identidad de Euler

$\pi, e, i, 0, 1$

$$e^{Ai} = \cos A + i \operatorname{sen} A \qquad A \in \mathbb{R}$$

$A = \pi$

$$e^{\pi i} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi$$

$$e^{\pi i} = -1$$

$$\boxed{e^{\pi i} + 1 = 0}$$

Ejemplo
Final

Resolver $y'' + 2y' + 5y = 0$

1) Resuelvo la ec. característica

$$\overset{a}{1}\lambda^2 + \overset{b}{2}\lambda + \overset{c}{5} = 0$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad a \quad b$$

$$= \frac{4 \pm 4i}{2} = 2 \pm 2i$$

2) ∴ Sol. general es:

$$y = e^{2x}\left(A_1 \cos(2x) + A_2 \operatorname{sen}(2x)\right)$$