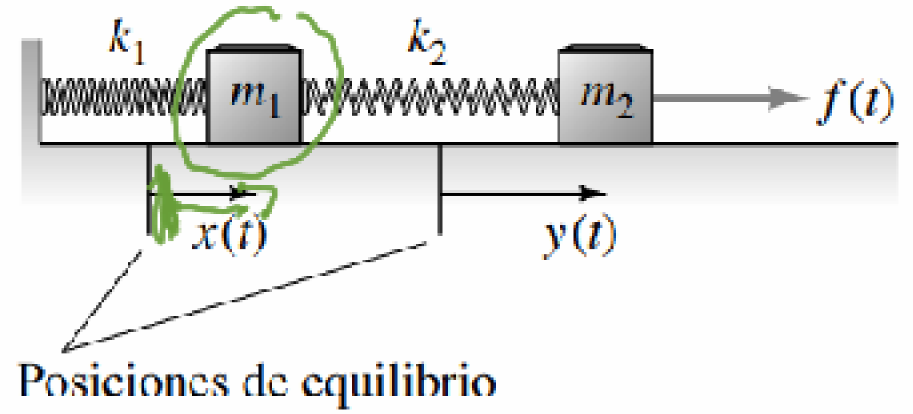


1°) ¿Qué se usa de Física?

a) Ley de Hooke: "$F = k x$"

b) 2ª Ley de Newton:

→ "$\vec{F} = m \cdot a$"

$a \to x''(t)$

m_1: $m_1 \cdot x'' = -k_1 x + k_2(y - x)$ [Ec. 1]

m_2: $m_2 \cdot y'' = -k_2(y - x) + f(t)$ [Ec. 2]

Masa m_1:

de dcha a izda 1

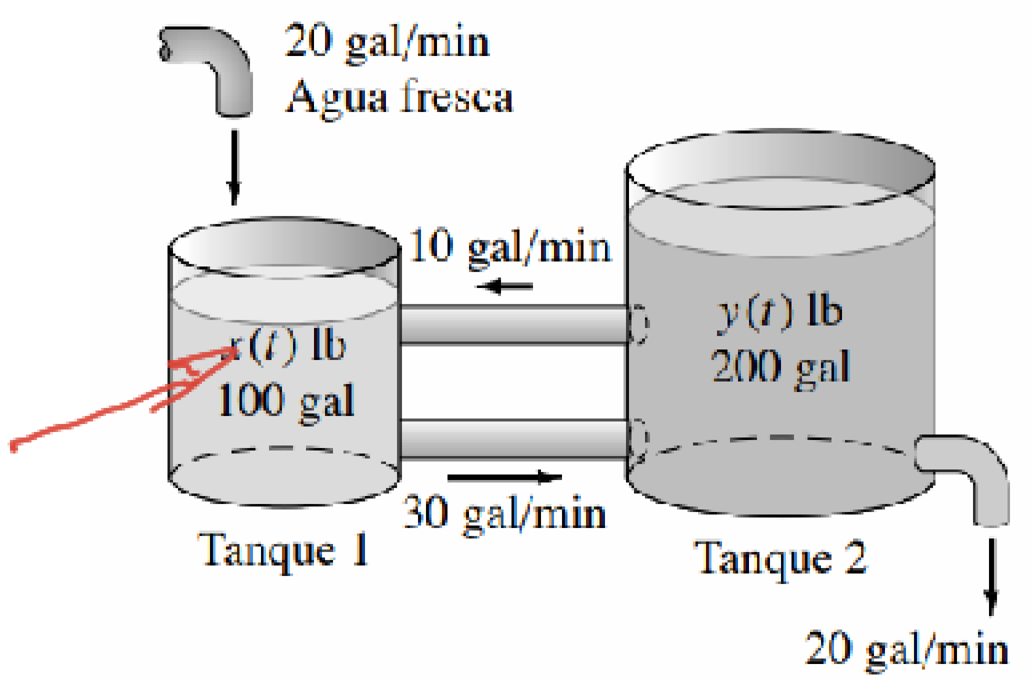
$-k_1 x \longleftarrow \boxed{m_1} \longrightarrow \boxed{k_2(y - x)}$

$\sum_{m_1} F_i = \underbrace{-k_1 x + k_2(y - x)}$

Masa m_2:

$-k_2(y - x) \longleftarrow \boxed{m_2} \longrightarrow f(t)$

$\sum_{m_2} F_i = \underbrace{-k_2(y - x) + f(t)}$



Considérense dos tanques con salmuera conectados como se muestra en la figura 4.1.3. El tanque 1 contiene $x(t)$ lb de sal en 100 gal de salmuera, y el tanque 2 contiene $y(t)$ lb de sal en 200 gal de la solución. La salmuera en cada tanque se mantiene uniforme por agitación, y se bombea de un tanque al otro con las velocidades indicadas en la figura 4.1.3. Se agrega agua fresca que fluye dentro del tanque 1 a 20 gal/min, y la salmuera en el tanque 2 fluye hacia afuera a 20 gal/min (de tal manera que el volumen total de la solución en los dos tanques permanece constante). La concentración de la sal en los dos tanques es de $x/100$ y $y/200$ lb/gal, respectivamente. Cuando se calculan las velocidades de cambio de la cantidad de sal en los dos tanques se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales $x(t)$ y $y(t)$ que debe satisfacer:

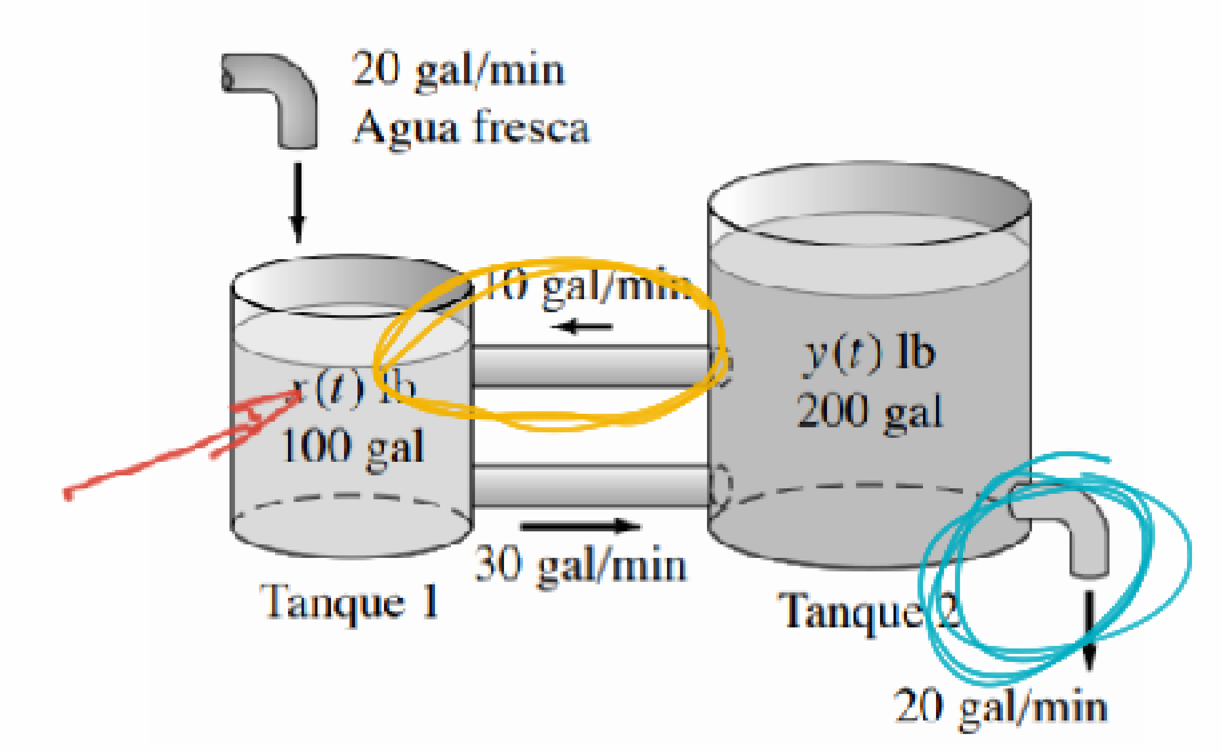
Tanque 1

$F_i \cdot C_i$ $\qquad$ $F_s \cdot C_s$

$$\frac{dx}{dt} = (\text{Tasa de ingreso}) - (\text{Tasa de Salida})$$

$$= \cancel{20.0} + 10 \cdot \frac{y(t)}{200} - 30 \cdot \boxed{\frac{x(t)}{100}}$$

E1 $\boxed{x' = \frac{1}{20} y(t) - \frac{3}{10} x(t)}$



El modelo buscado es:

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= -\frac{3}{10}x + \frac{1}{20}y \\ y' &= \frac{3}{10}x - \frac{3}{10}y \end{aligned}}$$

Tanque 2:

$$\frac{dy}{dt} = (\text{Ingreso}) - (\text{Salida})$$

$$= 30 \cdot \frac{x}{100} - \left[10 \cdot \frac{y}{200} + 20 \cdot \frac{y}{200}\right]$$

Ec2 $\boxed{y' = \frac{3}{10}x - \frac{3}{30}y}$

Matricialmente:

$$\vec{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{1}{20} \\ \frac{3}{40} & -\frac{3}{10} \end{pmatrix}}_{A} \vec{X}$$

donde $\vec{X} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

- Valores propios de A

⋮

Métodos para resolver SED (Vistos)

1) Eliminación
2) Laplace (✗ ✗)
3) Matricial.

Exemplo

Método de eliminação

$$\begin{cases} x' = y + x \\ y' = x \end{cases}$$

$$x = y'$$

$$y'' = y + y'$$

$$(*) \quad \boxed{y'' - y' - y = 0}$$

$$r^2 - r - 1 = 0$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}}$$

$$\boxed{x = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}}$$

Ahora, usamos Td L.

$$\begin{cases} x' = x + y & \big| \mathcal{L} \\ y' = x & \big| \mathcal{L} \end{cases}$$

$x(0) = a$
$y(0) = b$

$\mathcal{L}\{x'\} = \mathcal{L}\{x\} + \mathcal{L}(y)$

$\underbrace{sX(s)}$ - $\underbrace{x(0)}$ = $\underbrace{X(s)}$ + $Y(s)$

$\#_1$: $X(s)(s-1) - Y(s) = a$

$sY(s) - b = X(s)$

$\#_2$: $-X(s) + sY(s) = b$

$$(s-1)\,X(s) - Y(s) = a$$

$$-X(s) + s\,Y(s) = b$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} s-1 & -1 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s(s-1) - 1 = s^2 - s - 1$$

$$\Delta X(s) = \begin{vmatrix} a & -1 \\ b & s \end{vmatrix} = as - s$$

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} s-1 & a \\ -1 & b \end{vmatrix} = bs - b - a$$

$$X(s) = \frac{as - s}{s^2 - s - 1} \; ; \quad Y(s) = \frac{bs - b - a}{s^2 - s - 1}$$

$\hookrightarrow$ F.O.

$\mathcal{L}^{-1}$

Método de Matricial

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to A \qquad X' = AX \to \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x \end{cases}$$

1º) Valores propios de A.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) - 1 = -\lambda + \lambda^2 - 1$$

$$= \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Paso 2 Vectores propios:

v.e. $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 1 \\ 1 & -\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\cancel{(1-\lambda_1)a + b} = 0 \quad \cdot \lambda_1$

$a - \lambda_1 b = 0$

$\lambda_1(1-\lambda_1)a + \lambda_1 b = 0$

$-1 \cdot a + \lambda_1 b = 0$

$-a + \lambda_1 b = 0$

$\lambda_1(1-\lambda_1) = ?$

pero se sabe:

$\lambda_1^2 - \lambda_1 - 1 = 0$

$\lambda_1(\lambda_1 - 1) = 1$

$b = 1 \quad v_1 = \lambda_1 \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$a = \lambda_1$?l

$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{pmatrix}$ etc